प्रस्तावना

यह पुस्तक मेरी इसी विषय की अँग्रेजी पुस्तक के आधार पर लिखी गई है। प्रत्येक लेखक को पुस्तक लिखने के लिये कोई बहाना देना पड़ता है। परन्तु हिन्दी में तो वैज्ञानिक पुस्तकों की इतनी कमी है कि किसी बहाने की आवश्यकता ही नहीं है। जहाँ तक मुझे पता है कम से कम 'ठोस ज्यामिति' पर तो हिन्दी में कोई पुस्तक है ही नहीं जिसमें इन्टरमीजियेट के पाठ्य-क्रम का समावेश हो।

इस पुस्तक में केवल वे ही साध्य रखे गये हैं जिनके बिना विद्यार्थी का काम चल ही नही सकता। एक भी साध्य ऐसा नहीं दिया गया है जो इन्टरमीजियेट के विद्यार्थियों के लिये अनावश्यक हो। कही-कही पर इन्टरमीजियेट के पाठ्य-क्रम मे साध्य रखे ही नही जाते। ठोस ज्यामिति की शिक्षा ठोसों से ही आरम्भ होती है। मेरा यह विचार है कि इस प्रणाली से विद्यार्थियो को विषय का स्पष्ट ज्ञान कदापि नहीं हो सकता। ठोसों की शिक्षा से पहले सरल रेखाओं और समतलों के साध्यों का अध्ययन नितान्त आवश्यक है।

इस पुस्तक में मैंने चित्रों का प्रचुर प्रयोग किया है। कभी-कभी तो एक ही ठोस की भिन्न-भिन्न स्थितियों के दो दो और तीन-तीन चित्र दिये हैं। किसी प्रश्न को हल करने से पहले उसका एक स्पष्ट चित्र बनाना आवश्यक है। कभी-कभी तो चित्र के देखते ही उसके हल करने की विधि ध्यान में आ जाती है।

प्रश्न अधिकतर भिन्न-भिन्न विश्वविद्यालयों के प्रश्न पत्रों से लिए हैं, ताकि विद्यार्थी उनमें वास्तविक रुचि ले।

इस पुस्तक का अधिकाश प्रूफ-संशोधन श्रीयुत् श्री प्रकाश बी० एस-सी० ने किया है जिसके लिये मैं उनका कृतज्ञ हूँ।

जो सज्जन इस पुस्तक की त्रुटियों की ओर मेरा ध्यान आकर्षित करेंगे अथवा कोई सशोधन सुझायेंगे उनका मैं अनुगृहीत हूँगा।

ब्रज मोहन

विषय सूची

ठोस ज्यामिति

विषय प्रवेश

१—बिन्दु मे स्थिति होती है, परिमाण नहीं होता। उसमें लम्बाई, चौड़ाई अथवा मोटाई नहीं होती। अस्तु, बिन्दु मे कोई घात नही होता।

रेखा मे लम्बाई होती है, चौड़ाई या मोटाई नही होती। अस्तु, रेखा मे एक घात होता है।

रेखाये बिन्दुओं से बनती हैं और एक दूसरे को बिन्दुओं पर काटती हैं।

तल में लम्बाई, चौड़ाई होती है, मोटाई नहीं होती। अस्तु, तल मे दो घात होते हैं।

तल रेखाओं से घिरे होते हैं और रेखाओं पर एक दूसरे को काटते हैं। रेखाये और तल परस्पर बिन्दुओं पर काटते हैं।

ठोस में लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई होती है। अस्तु, ठोस में तीन घात होते हैं।

ठोस तलों से घिरे होते हैं और परस्पर तलों पर काटते हैं।

२—**समतल** ऐसा तल होता है कि यदि उस पर कोई दो बिन्दु लिये जायँ तो उनको मिलानेवाली सरल रेखा, पूरी की पूरी, उसी तल पर रहेगी। अतः, यह असम्भव है कि एक सरल रेखा का थोड़ा सा भाग एक समतल पर हो, और शेष भाग दूसरे पर।

सरल रेखायें जो एक ही समतल पर खिंची हों अथवा जिनमें से एक समतल खींचा जा सके, **समतलस्थ** कहलाती हैं।

दो समतलस्थ सरल रेखायें या तो एक दूसरे को काटेंगी या समानान्तर होंगी।

सरल रेखायें जिनमें से कोई समतल नहीं खींचा जा सकता, **कुटिल** कहलाती हैं। कुटिल रेखायें न तो काटती हैं न समानान्तर होती हैं।

अतः, दो रेखायें

या तो (क) एक दूसरे को काटेंगी,

या (ख) समानान्तर होंगी,

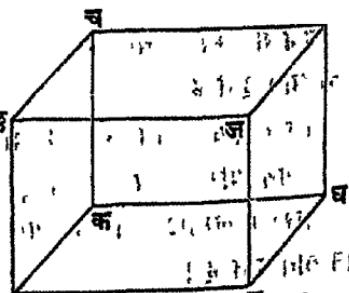
या (ग) कुटिल होंगी।

अतएव, यदि हम समानान्तर सरल रेखाओं की यह परिभाषा दें कि "दो रेखायें जो कितनी भी बढ़ाये जाने पर न मिलें, समानान्तर कहलाती हैं" तो वह पर्याप्त न होगी। दो सरल रेखायें तभी समानान्तर कहलायेंगी जब कि—

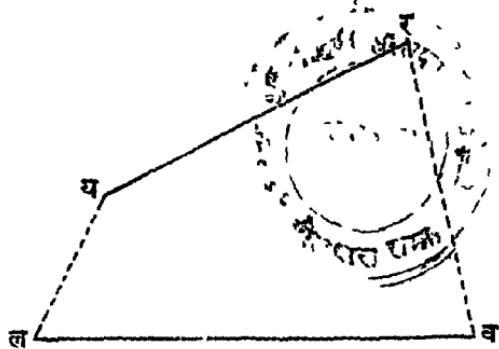
(क) दोनों समतलस्थ हों,
और (ख) दोनों चाहे जितनी बढाई जायें, कभी न मिलें।

रेखाओं के समानान्तर होने के लिये दोनों शर्तें अनिवार्य हैं।

चित्र १

मान लो कि (क ख ग घ, च छ ज झ) किसी कमरे का चित्र है। रेखायें क च, क घ बिन्दु क पर मिलती हैं। रेखायें छ ज, क घ समानान्तर हैं। रेखायें ग ज, क घ कुटिल हैं। इसी प्रकार क ख, घ झ भी कुटिल हैं।

मान लो कि य र, ल व दो कुटिल रेखायें हैं। तो रेखायें य ल, र व भी कुटिल होगी, क्योंकि यदि ये रेखायें समतलस्थ हों तो बिन्दु य, ल, व, र समतलस्थ होंगे, अस्तु रेखायें य र, ल व समतलस्थ हो जायँगी।

एक चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष समतलस्थ न हों, **कुटिल चतुर्भुज** कहलाता है।

चित्र २

यदि किसी समतल चतुर्भुज को विकर्ण पर मोड़े तो कुटिल चतुर्भुज बन जायगा।

३—सरल रेखाओं की लम्बाई अपरिमित होती है और समतलो का विस्तार अपरिमित होता है।

एक सरल रेखा और एक समतल **समानान्तर** कहलाते हैं यदि उन दोनो को जितना चाहे बढ़ायें, तब भी वह न मिलें।

अस्तु, एक सरल रेखा और एक समतल में तीन प्रकार का संबंध हो सकता है :—

(क) सरल रेखा समतल के समानान्तर हो, अर्थात् दोनों मे एक भी बिन्दु साझी न हो।

(ख) सरल रेखा समतल को काटती हो, अर्थात् दोनों में केवल एक बिन्दु साझी हो।

(ग) सरल रेखा समतल में ही पड़ी हो, अर्थात् दोनो में असंख्य बिन्दु साझी हों।

चित्र १ में रेखा झ घ समतल क ख छ च के समानान्तर है; रेखा च झ समतल क ख ग घ के समानान्तर है। रेखा ग ज समतल

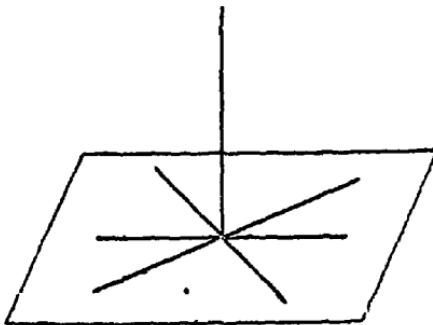
च छ ज झ से बिन्दु **ज** पर मिलती है। रेखा **ख ग** समतल **क ख ग घ** में पड़ी है, रेखा **ख छ** समतल **ग ज छ ख** में पड़ी है।

स्पष्ट है कि यदि कोई रेखा किसी समतल के समानान्तर है तो वह उस समतल पर पड़ी किसी रेखा से नही मिल सकती।

एक रेखा एक समतल पर लम्ब या **अभिलम्ब** कहलाती है यदि वह ऐसी प्रत्येक रेखा पर लम्ब हेा जो उससे उस समतल मे मिले।

एक रेखा जो एक समतल से मिले पर उस पर अभिलम्ब न हो, समतल पर तिर्यक कहलाती है।

४—दो समतल **समानान्तर** कहलाते है यदि उनको जितना चाहे बढाया जाय तो भी वह न मिले।

चित्र २

चित्र (१) में समतल **क ख ग घ और च छ ज झ** समानान्तर हैं। समतल **क ख छ च** और **ग ज झ घ** भी समानान्तर हैं।

स्पष्ट है कि यदि दो समतल समानान्तर हैं तो उनमें से किसी एक में पड़ी कोई रेखा दूसरे के समानान्तर होगी।

५—स्वयं सिद्धियाँ

(१) एक सरल रेखा मे से, या दो निर्दिष्ट बिन्दुओ मे से होकर असंख्य समतल खींचे जा सकते हैं।

(२) दो छेदक रेखाये किसी एक ही रेखा के समानान्तर नहीं हो सकतीं। अस्तु, जो रेखाये एक ही रेखा के समानान्तर हों, परस्पर भी समानान्तर होंगी।

यह फल सुगमता से निकलता है कि किसी निर्दिष्ट रेखा के समानान्तर, किसी निर्दिष्ट बिन्दु में से एक, और केवल एक ही, रेखा खींची जा सकती है।

(३) दो छेदक समतल किसी एक समतल के समानान्तर नहीं हो सकते। अस्तु, जो समतल एक ही समतल के समानान्तर हों, परस्पर भी समानान्तर होंगे।

स्पष्ट है कि किसी निर्दिष्ट समतल के समानान्तर, किसी निर्दिष्ट बिन्दु से, एक, और केवल एक ही, समतल खींचा जा सकता है।

६—समतल की सृष्टि

एक सरल रेखा जो

(१) एक अचल बिन्दु मे से होकर जाती है, और एक अचल सरल रेखा से मिलती है।

(२) दो अचल छेदक रेखाओं से मिलती है।

(३) दो अचल समानान्तर रेखाओं से मिलती है।

(४) एक अचल रेखा पर उसके एक निर्दिष्ट बिन्दु पर लम्ब है।

(५) एक अचल बिन्दु मे से होकर जाती है, और एक निर्दिष्ट समतल के समानान्तर है।

(६) दो अचल रेखाओं में से एक से मिलती है और दूसरी के समानान्तर है।

(७) एक अचल समतल पर लम्ब है और समतल पर पड़ी एक निर्दिष्ट रेखा से मिलती है।

या (८) एक अचल समतल के एक ही ओर, उससे निर्दिष्ट दूरी पर उसके समानान्तर घूमती है,

एक समतल की सृष्टि करती है।

७. स्मरणीय बातें

$\pi = \frac{२२}{७}$ या ३ १४

$\sqrt{२}$ = १ ४१ $\sqrt{५}$ = २ २४

$\sqrt{३} = १\cdot७३ \qquad \sqrt{६} = २\cdot४५$

एक सम △ मध्यिका $= \dfrac{\text{भुजा} \sqrt{३}}{२} = \dfrac{\sqrt{३}\,\text{क}}{२}$

एक सम △ का क्षेत्रफल $= \dfrac{\text{भुजा}^{२} \sqrt{३}}{४} = \dfrac{\sqrt{३}\,\text{क}^{२}}{४}$

एक सम △ में केन्द्रव, अतः केन्द्र, परिकेन्द्र और लाम्बिक केन्द्र, सब एकागी होते हैं।

∥ का तात्पर्य है "समानान्तर" या "के समानान्तर है।"

⊥ ,, "लम्ब" या "पर लम्ब है।"

१ औंस = $\frac{१}{२}$ छटाक = $२\frac{१}{२}$ तोले

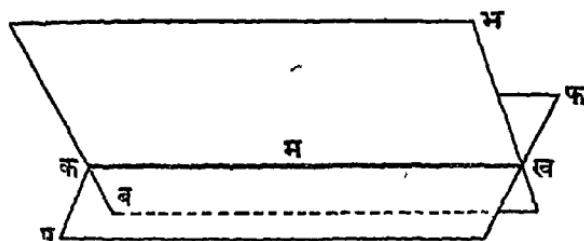
१ घन सेन्टीमीटर पानी की तौल १ ग्राम है।

१ घन फुट पानी का वज़न १००० औन्स या ६२.५ पौण्ड या ३१.२५ सेर है और घनफल $६\frac{१}{४}$ गैलन।

इस पुस्तक में 'रेखा' से तात्पर्य 'सरल रेखा' से होगा जब तक कि प्रसग मे इसके विरुद्ध स्पष्टतया न दिया हो।

—:०:—

साध्य १

एक सरल रेखा और उसके बाहर एक बिन्दु में से एक, और केवल एक ही, समतल जा सकता है।

चित्र ४

मान लो कि क ख निर्दिष्ट रेखा है और म उसके बाहर निर्दिष्ट बिन्दु है।

तो यह सिद्ध करना है कि क ख और म में से एक, और केवल एक ही, समतल खींचा जा सकता है।

मान लो कि प फ कोई समतल है जो क ख में से होकर जाता है और मान लो कि प फ रेखा क ख के चारों ओर घूमता है। घूमते समय समतल प फ असख्य स्थितियों में से होकर जाता है। अस्तु, प फ किसी निर्दिष्ट बिन्दु में से होकर जा सकता है।

मान लो कि उसकी स्थिति ब भ है जिसमें वह बिन्दु म मे होकर जाता है। अब यह निश्चित, अचल स्थिति होगई, और ऐसी केवल एक ही स्थिति है। अस्तु, क ख और म में से केवल एक ही समतल जा सकता है।

उपसाध्य (१) दो छेदक रेखाओं में से एक, और केवल एक ही, समतल जा सकता है ।

(२) तीन विन्दुओं में से, जो समरैखिक न हों, एक, और केवल एक ही, समतल जा सकता है ।

ऊपर लिखे साध्य और उपसाध्यों से स्पष्ट है कि एक समतल की स्थिति निश्चित हो जाती है, यदि यह पता हो कि वह

(क) एक सरल रेखा और उसके बाहर एक विन्दु में से,

(ख) दो छेदक रेखाओं में से,

(ग) तीन विषम रैखिक विन्दुओं में से,

या (घ) दो || रेखाओं में से,

होकर जाता है ।

अभ्यास १

(१) त्रिभुज, समानाभुज और समलम्भुज समतल आकृतियां हैं।

(२) यदि एक सरल रेखा दो ‖ सरल रेखाओं को काटे, तो तीनों रेखायें समतलस्थ होंगी।

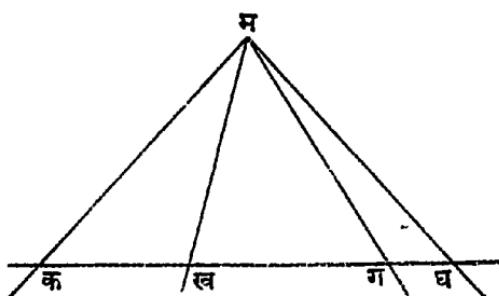
(३) एक ऐसी सरल रेखा खींचो जो दो निर्दिष्ट कुटिल रेखाओं को काटे। यह कब असम्भव होगा?

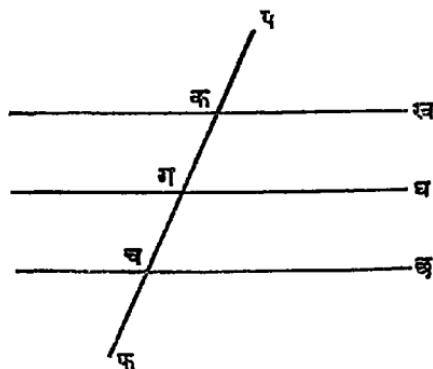
(४) छेदक रेखाओं का एक जोड़ा क्रमशः दूसरे जोड़े के ‖ है। यदि पहिले जोड़े की एक रेखा दूसरे जोड़े की एक रेखा को काटे तो चारों रेखायें समतलस्थ होंगी।

(बनारस १९३५)

(५) एक लकड़ी का यन्त्र अङ्गरेज़ी के N के आकार का है। उसके तीनों डण्डों में से कितने समतल गुज़र सकते हैं?

साध्य २

यदि एक सरल रेखा तीन या अधिक (क) बिन्दुगामी रेखाओं या

चित्र ५

(ख) समानान्तर रेखाओं को काटे, तो सब रेखायें समतलस्थ होंगी।

चित्र ६

(क) मान लो कि सरल रेखा क घ बिन्दुगामी रेखाओं म क, म ख, म ग, म घ···को क, ख, ग, घ···पर काटती है।

तो यह सिद्ध करना है कि रेखाये क घ, म क, म ख, म ग···
सब समतलस्थ हैं।

बिन्दु म, ग △ म क ख के समतल मे हैं। अस्तु, रेखा म ग
△ म क ख के समतल मे हैं।

अर्थात्; रेखाये क घ, म क, म ख समतलस्थ हैं।

इसी प्रकार हम रेखाओं म घ···के बारे में भी सिद्ध कर सकते हैं।

(ख) मान लो कि रेखा प फ, समानान्तर रेखाओं क ख, ग
घ, चछ···को क, ग, च···पर काटती है।

तो यह सिद्ध करना है कि रेखाये प फ, क ख, ग घ, च छ··
सब समतलस्थ हैं।

बिन्दु क, ग समानान्तर रेखाओं क ख, ग घ के समतल मे हैं।

अस्तु, पूरी रेखा प क ग च फ रेखाओं क ख, ग घ के समतल
में हैं।

अर्थात्, छेदक रेखाये ग घ, प फ रेखाओ क ख, ग घ के सम-
तल मे हैं।

फिर, बिन्दु ग, च समानान्तर रेखाओं ग घ, च छ के समतल
मे हैं।

अस्तु, पूरी रेखा प क ग च फ रेखाओं ग घ, च छ के समतल
मे हैं।

अर्थात्, छेदक रेखाये ग घ, प फ रेखाओं ग घ, च छ के
समतल मे भी हैं।

परन्तु, छेदक रेखाओं ग घ, प फ में से एक ही समतल जा
सकता है।

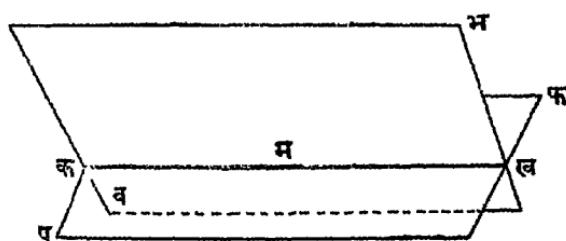
(साध्य १ उप-साध्य १)

अस्तु, रेखाये क ख, ग घ, च छ एक ही समतल में हैं।

इसी प्रकार और रेखाओं को भी सिद्ध कर सकते हैं।

साध्य ३

दो छेदक समतल एक सरल रेखा पर मिलते हैं, और किसी अन्य बिन्दु पर नहीं मिलते।

चित्र ७

मान लो कि **प फ**, **ब भ** दो छेदक समतल हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि यह एक सरल रेखा पर मिलते हैं और किसी अन्य बिन्दु पर नहीं मिलते।

मान लो कि बिन्दु **क**, ख दोनों समतलों पर स्थित हैं।

तो पूरी रेखा **क ख** दोनों समतलों पर स्थित होगी। अस्तु, समतल रेखा **क ख** पर मिलते हैं।

यदि सम्भव हो तो मान लो कि बिन्दु **म** रेखा **क ख** के बाहर है और दोनों समतलो पर है। तो रेखा **क ख** और बिन्दु **म** (जो उसके बाहर है) में से दो समतल **प फ** और **ब भ** गुज़र रहे हैं। परन्तु यह असम्भव है। अस्तु, ऐसा कोई बिन्दु **म** दोनों समतलों पर नहीं हो सकता जो **क ख** के बाहर हो।

अर्थात्, दोनों समतल रेखा **क ख** पर मिलते हैं और किसी अन्य बिन्दु पर नहीं मिलते।

परिभाषा—जिस रेखा पर दो समतल मिले, दोनों समतलों की साझी रेखा या **साझी काट** या **युगल काट** कहलाती है।

अभ्यास २

(१) पुस्तकों को समतल मान कर ऐसे तीन समतलों के उदाहरण दो जो—

(क) एक दूसरे के ‖ हों।

(ख) एक बिन्दु पर मिले।

(ग) एक सरल रेखा पर मिलें।

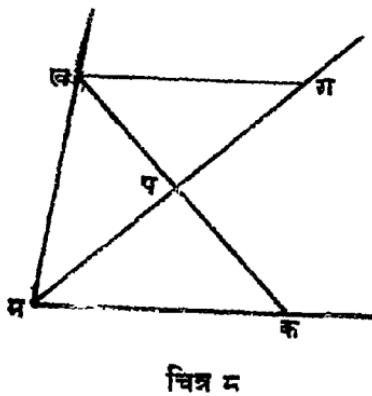
(घ) दो ‖ रेखाओं पर मिले।

(ङ) तीन ‖ रेखाओं पर मिले।

(२) यदि तीन समतल एक दूसरे को काटे तो कटान रेखाये या तो ‖ होगी या बिन्दुगामी।

(३) म क, म ख, म ग, तीन समतलस्थ, बिन्दुगामी रेखाये हैं जिनमे म ग बीच की है। एक सरल रेखा खीचो जो तीनों रेखाओं को काटे और जिसे म ग अधियाये।

[म ग मे कोई बिन्दु ग लो। ग से म क के ‖ ग ख खींचो जो म ख से ख पर मिले। ख को म ग के मध्य बिन्दु प से मिलाओ। ख प को बढ़ाओ कि म क से क पर मिले। तो क प ख ही अभीष्ट रेखा होगी।]

चित्र ८

(४) काग़ज़ को मोड़ने से सदैव सीधी लकीर क्यों बनती है ?

(५) क्या कंघे के सब दाँते समतलस्थ होते हैं ? क्यों ?

(६) अपने कमरे के दो विकर्ण खींचो। क्या यह दोनों विकर्ण कमरे की उन रेखाओं से समतलस्थ होंगे जिनके सिरों को मिलाते हैं ?

(७) एक सीढ़ी के समस्त डण्डे समतलस्थ होते हैं।

साध्य ४

एक सरल रेखा जो दो छेदक रेखाओं पर लम्ब है, उनके समतल पर भी लम्ब होगी।

चित्र ६

मान लो कि ल म, रेखाओ म क, म ख पर ⊥ है। मान लो कि म क, म ख का समतल य र है।

तो यह सिद्ध करना है कि लम ⊥ समतल य र।

समतल य र में बिन्दु म में से कोई रेखा म ग खींचो।

समतल य र मे एक रेखा क ग ख ऐसी खींचो जो म क, म ख, म ग से क, ख, ग पर मिले और जिसे म ग बिन्दु ग पर अधियाये।

ल क, ल ख, ल ग को जोड़ो।

अब △ ल क ख मे ल $क^2$ + ल $ख^2$ = २ (ल $ग^2$ + क $ग^2$)

और △ म क ख में म $क^2$ + म $ख^2$ = २ (म $ग^2$ + क $ग^2$)

∴ घटाने से, (ल $क^2$ − म $क^2$) + (ल $ख^2$ − म $ख^2$)
= २ (ल $ग^2$ − म $ग^2$)

अर्थात् $२ \text{ल म}^२ = २ (\text{ल ग}^२ - \text{म ग}^२)$

अस्तु $\text{ल म}^२ + \text{म ग}^२ = \text{ल ग}^२$

$\therefore$ ल म $\perp$ म ग ।

परन्तु समतल य र मे म ग कोई भी रेखा है बिन्दु म के मध्येन ।

अस्तु, ल म लम्ब है किसी भी रेखा पर जो समतल य र में म मे से गुज़रती हो ।

अर्थात् ल म $\perp$ समतल य र ।

अभ्यास ३

(१) एक बिन्दु म से एक रेखा तक, जो म मे से हो कर नही जाती, अनन्त रेखाएँ खींची गई हैं। यदि एक रेखा म प उन रेखाओं में से दो पर ⊥ है तो सिद्ध करो कि वह सब पर ⊥ होगी। (बनारस १९३५)

(२) दो कलम लेकर यह बात दर्शाओ कि यदि एक रेखा किसी समतल पर खिँची एक रेखा पर ⊥ है तो यह आवश्यक नहीं है कि वह समतल पर भी ⊥ हो।

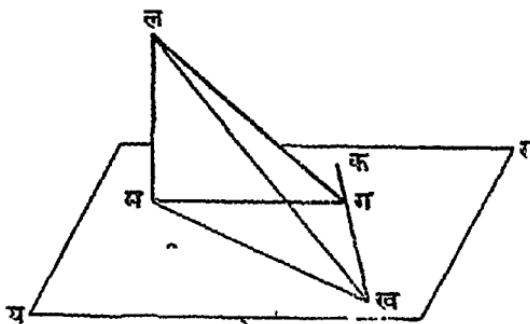
(३) काग़ज़ के समतल पर किसी रेखा क ख मे कोई बिन्दु म लो। तो तुम म मे से क ख पर कितने ⊥ डाल सकते हो (क) काग़ज़ पर (ख) आकाश मे।

(४) तीन पेन्सिलो को इस प्रकार रक्खो कि प्रत्येक शेष दोनो पर ⊥ हो।

सिद्ध करो कि प्रत्येक पेन्सिल शेष दोनो के समतल पर ⊥ होगी।

(५) एक सरल रेखा और एक बिन्दु दिये हैं। बिन्दु के मध्येन एक समतल खीचो जो सरल रेखा पर ⊥ हो।

साध्य ५

यदि किसी बाहरी बिन्दु से एक समतल पर लम्ब डाला जाय, और लम्ब के पद से समतल पर खिंची किसी रेखा पर लम्ब डाला जाय, तो जो रेखा पिछले लम्ब के पद को बाहरी बिन्दु से मिलायेगी, वह समतल पर खिंची रेखा पर भी लम्ब होगी।

चित्र १०

मान लो कि य र एक समतल है, उसमें क ख कोई सरल रेखा है और ल उसके बाहर कोई बिन्दु है।

मान लो कि ल म लम्ब है समतल य र पर, और मान लो कि इस लम्ब के पद म से क ख पर म ग लम्ब डाला गया है जो उस से ग पर मिलता है।

ल ग को जोड़ो।

तो यह सिद्ध करना है कि ल ग ⊥ क ख।

क ख पर कोई अन्य बिन्दु ख लो।

ल ख, म ख को जोड़ो।

$\because$ ल म $\perp$ समतल य र,

$\therefore$ ल म $\perp$ म ख और म ग ।

अस्तु, ल ख^2 = ल म^2 + म ख^2

= ल म^2 + म ग^2 + ख ग^2

= ल ग^2 + ख ग^2

$\therefore$ ल ग $\perp$ ख ग ।

इस साध्य को "तीन लम्बों का साध्य" कहते है ।

विलोमत : यदि ल म $\perp$ समतल य र, और ल ग $\perp$ क ख,

तो म ग $\perp$ क ख ।

अभ्यास ४

(१) क ख ग घ एक आयत है जिसमें क ख = १२, ख ग = ५। ख के मध्येन, आकृति के समतल पर ख ट लम्ब डाला गया है। यदि ख ट = ५ तो ट की ग घ, घ क और ग क से दूरियाँ निकालो।

(२) एक समतल पर स्थित सरल रेखायें जो एक बाह्य बिन्दु से समदूरस्थ हों, एक वृत्त को स्पर्श करेंगी।

(३) समानान्तर समतलस्थ सरल रेखाओं के एक समूह पर एक बाह्य बिन्दु से लम्ब डाले गये हैं। सिद्ध करो कि उनके पद एक ऐसी सरल रेखा पर स्थित होंगे जो रेखा-समूह पर लम्ब है।

(४) △ क ख ग का लाम्बिक केन्द्र म है। म प △ के समतल पर ⊥ है। सिद्ध करो कि ख ग ⊥ समतल क म प।

(बनारस १९३७)

(५) दो छेदक समतलों में से एक में क कोई बिन्दु है। पहले समतल पर क प और दूसरे पर क फ ⊥ डाले गये हैं। यदि यह लम्ब दूसरे समतल से क्रमशः प, फ पर मिलें तो सिद्ध करो कि प फ दोनों समतलों के युगल काट पर ⊥ होगा।

(६) म क, म ख, म ग तीन परस्पर लम्ब सरल रेखायें हैं;

(क) यदि क घ लम्ब डाला गया है ख ग पर, तो सिद्ध करो कि म घ ⊥ ख ग।

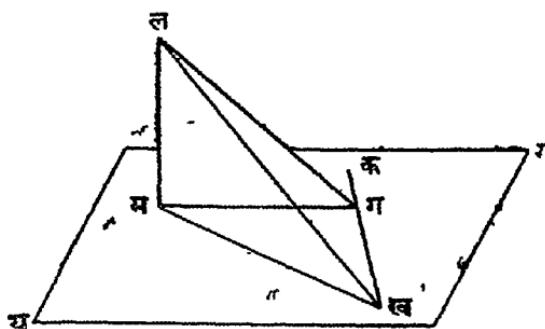
(ख) यदि म य, म र म ल लम्ब डाले गये हैं क्रमशः ख ग, ग क, क ख पर, तो सिद्ध करो कि △ य र ल △ क ख ग का पदिक △ है।

(ग) यदि समतल क ख ग पर म घ लम्ब डाला जाय तो सिद्ध करो कि घ △ क ख ग का लाम्बिक केन्द्र है।

साध्य ६

एक निर्दिष्ट समतल पर एक बहिर्बिन्दु से लम्ब डालना ।

चित्र ११

मान लो कि य र एक समतल है और ल उसके बाहर एक बिन्दु है ।

तो समतल य र पर ल से एक लम्ब डालना है ।

मान लो कि समतल य र में क ख कोई सरल रेखा है ।

ल से क ख पर ल ग ⊥ डालो ।

समतल य र में क ख पर म ग ⊥ डालो

अब ल से म ग पर ल म ⊥ डालो ।

तो ल म ही अभीष्ट लम्ब होगा समतल य र पर ।

क ख पर कोई अन्य बिन्दु ख लो ।

ल ख, म ख को जोड़ो ।

अब, $\text{ल ख}^2 = \text{ख ग}^2 + \text{ग ल}^2$

$= \text{ख ग}^2 + \text{ग म}^2 + \text{म ल}^2$

$= \text{ख म}^2 + \text{म ल}^2$

∴ ल म ⊥ म ख।

अस्तु, ल म ⊥ म ख, म ग।

∴ ल म ⊥ समतल य र। (साध्य ४)

अनुसाध्य—एक निर्दिष्ट सरल रेखा पर एक बहिर्बिन्दु से लम्ब समतल खींचना।

मान लो कि क ख निर्दिष्ट रेखा है और ल बहिर्बिन्दु।

कोई समतल य र लो जो क ख में से होकर जाता हो।

ल से क ख पर ल ग ⊥ डालो और समतल य र में क ख पर ग म ⊥ डालो।

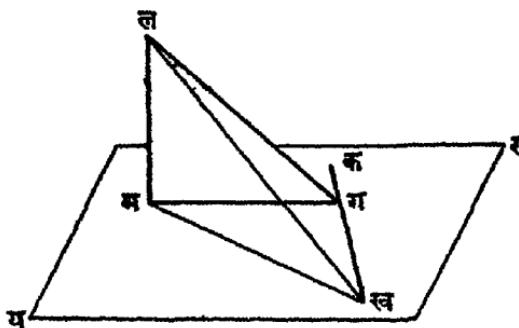
तो ग ल म ही अभीष्ट समतल होगा।

∵ ग ल ⊥ क ख,

और ग म ⊥ क ख।

∴ समतल ग ल म ⊥ क ख। (साध्य ४)

साध्य ७

एक निर्दिष्ट समतल के किसी बिन्दु पर लम्ब खींचना ।

चित्र १२

मान लो कि य र एक समतल है जिसमें म एक निर्दिष्ट बिन्दु है ।
तो बिन्दु म मे से समतल य र पर एक लम्ब खींचना है ।
मान लो कि समतल मे क ख कोई सरल रेखा है ।

म से क ख पर म ग ⊥ डालो ।

किसी और समतल में जो क ख में से होकर जाता हो, ग ल ⊥ डालो क ख पर ।

अब समतल ग ल म में म ल ⊥ खींचो म ग पर ।

तो ल म ही अभीष्ट लम्ब होगा ।

उपपत्ति साध्य ६ की उपपत्ति की तरह है ।

अभ्यास ५

(१) एक वृत्त का केन्द्र **म** है। **म** के मध्येन वृत्त के समतल पर एक लम्ब डाला गया है। सिद्ध करो कि इस लम्ब का कोई भी बिन्दु वृत्त की परिधि के समस्त बिन्दुओं से समदूरस्थ होगा।

(२) पिछले प्रश्न में लम्ब पर स्थित एक बिन्दु **क** है जो **म** से ४ सम की दूरी पर है। यदि वृत्त की त्रिज्या ३ सम है तो वृत्त की परिधि के किसी बिन्दु से **क** की दूरी निकालो।

(३) **य र** एक समतल है और **क, ख** उसके बाहर दो बिन्दु हैं। **य र** पर एक ऐसे बिन्दु **म** की स्थिति ज्ञात करो कि **क म + ख म** लघुतम हो।

पहिले **क, ख** समतल के एक ही पक्ष में और फिर भिन्न पक्षों मे लेकर दोनों दशाओं का भेद दिखाओ।

साध्य ८

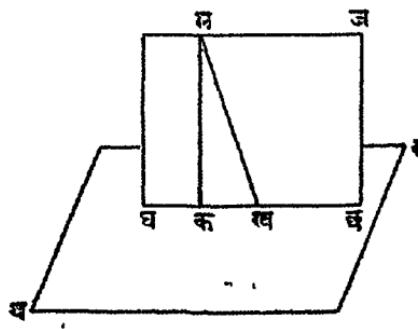
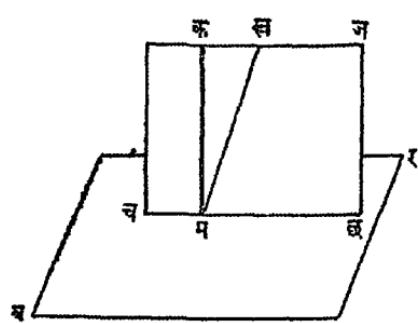
किसी निर्दिष्ट बिन्दु में से एक समतल पर एक और केवल एक ही लम्ब खींचा जा सकता है, चाहे बिन्दु समतल मे स्थित हो या बाहर।

मान लो कि थ र एक समतल है और म निर्दिष्ट बिन्दु।

तो यह सिद्ध करना है कि म में से समतल थ र पर एक और केवल एक ही लम्ब खींचा जा सकता है।

यदि हो सके तो बिन्दु म में से दो लम्ब म क, म ख समतल थ र पर डालो।

यह दोनों लम्ब एक समतल निर्धारित करते हैं।

मान लो कि यह समतल च ज है और दोनों समतलों का युगल काट च छ है।

चित्र १३

चित्र १४

अब म क, म ख ⊥ समतल थ र।

और च छ इस समतल में एक सरल रेखा है।

∴ म क, म ख ⊥ रेखा च छ।

अस्तु, अब दो लम्ब हो गये एक ही समतल च ज में, एक ही सरल रेखा च छ पर एक ही बिन्दु म के मध्येन, जो कि असम्भव है।

∴ एक, और केवल एक ही लम्ब खींचा जा सकता है बिन्दु म से समतल थ र पर।

अभ्यास ६

(१) जितनी सरल रेखाएँ एक बाह्य बिन्दु से एक समतल पर खींची जा सकती हैं, उनमें लम्ब न्यूनतम होता है।

(२) एक बाह्य बिन्दु से एक समतल को जितने समान तिर्यक खींचे जा सकते हैं उनके पदों की निधि एक वृत्त होती है।

(जब तुम परकार से एक वृत्त खींचते हो तो अनजान में इस साध्य का प्रयोग करते हो।)

(३) एक बाह्य बिन्दु से एक समतल को जो तिर्यक खींचे जाते हैं उनमें से वह जो लम्ब के पद से समदूरस्थ होते हैं अथवा लम्ब से समान कोण बनाते हैं, समान होते हैं।

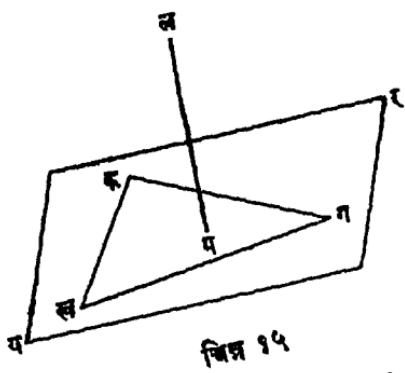
(४) एक बिन्दु एक समकोण △ के शीर्षों से समदूरस्थ है। सिद्ध करो कि जो रेखा उस बिन्दु को कर्ण के मध्य बिन्दु से मिलायेगी, △ के समतल पर ⊥ होगी।

(५) यदि एक समतल पर तीन बिन्दु, क, ख, ग एक बाह्य बिन्दु म से समदूरस्थ हों तो जो लम्ब म से समतल पर डाला जायगा, उसका पद △ क ख ग का परिकेन्द्र होगा।

(६) एक समतल पर स्थित तीन बिन्दु क, ख, ग एक बाह्य बिन्दु म से समदूरस्थ हैं। सिद्ध करो कि जो सरल रेखा म को △ के परिकेन्द्र से मिलायेगी, समतल पर ⊥ होगी।

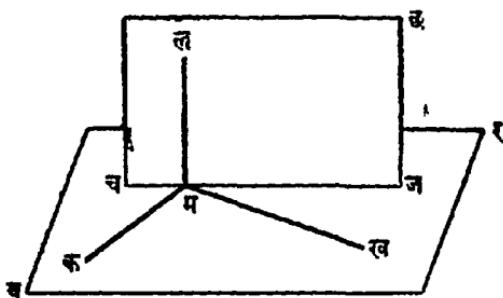
(७) तीन बिन्दुगामी विषमतलस्थ सरल रेखायें दी हुई हैं; एक चौथी बिन्दुगामी रेखा खींचो जो तीनों रेखाओं से समान कोण बनाती हो।

साध्य ८

(दूसरी विधि)

चित्र १५

परकार की सहायता से, समतल थ र में तीन बिन्दु क, ख, ग, ज्ञात करो जो निर्दिष्ट बिन्दु ल से समदूरस्थ हों। △ क ख ग का परिकेन्द्र म ज्ञात करो। ल म को जोड़ो। यही अभीष्ट लम्ब होगा।

साध्य ६

एक सरल रेखा के किसी निर्दिष्ट विन्दु पर जितने भी लम्ब खींचे जायँ ,सब एक समतल मे स्थित होंगे जो रेखा पर लम्ब होगा।

चित्र १६

मान लो कि म क, म ख, म ग तीन सरल रेखाएँ निर्दिष्ट सरल रखा ल म पर बिन्दु म पर लम्ब हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि म क, म ख, म ग एक समतल पर स्थित हैं जो ल म पर ⊥ है।

मान लो कि म क, म ख का समतल य र है और म ग, म ल का समतल च छ।

मान लो कि समतलों का युगल काट च ज है।

∵ ल म ⊥ म क ,म ख

∴ ल म ⊥ समतल य र। (साध्य ४)

और म ज, समतल य र में एक सरल रेखा है,

∴ म ल ⊥ म ज

अब म ग, म ज दोनों ⊥ हैं एक ही समतल य र में एक ही सरल रेखा च ज पर एक ही बिन्दु म के मध्येन।

अस्तु म ग, म ज एकांगी हैं।

अर्थात्, म ग भी समतल य र में स्थित है।

इस साध्य के कुछ परिचित उदाहरण

(१) पहिये की तीलियों का समतल धुरे पर लम्ब होता है।

(२) छत-पंखे के पंख एक समतल में घूमते हैं जो पंखे के डंडे पर लम्ब होता है।

अनु-साध्य १—यदि एक सम ∠ एक भुजा के चारों ओर घूमे तो दूसरी भुजा एक समतल बनायेगी जो उस पर लम्ब होगा।

२—यदि एक सरल रेखा के किसी बिन्दु पर ⊥ समतल खींचना हो तो किन्हीं दो समतलों में, जो उस रेखा में से जाते हों, उस बिन्दु में से रेखा पर दो लम्ब डालना पर्याप्त होगा।

परिभाषा १—यदि एक डोरे से एक ईंट बाँध कर लटकाई जाये तो उसको **साहुल सूत्र** कहते हैं।

२—एक स्थिर साहुल सूत्र की दिशा को खड़ी दिशा कहते हैं।

३—कोई समतल जो एक खड़ी रेखा पर लम्ब हो, **पड़ा समतल** कहलाता है।

४—एक पड़े समतल में स्थित कोई रेखा **पड़ी रेखा** कहलाती है।

अभ्यास ७

(१) एक बिन्दु मे से कितनी खड़ी रेखाएँ खीच सकते हो ?

(२) एक खड़ी रेखा के किसी बिन्दु में से कितनी पड़ी रेखाएँ खींच सकते हो और वह किस प्रकार स्थित होंगी ?

(३) यदि एक △ अपने आधार के चारो ओर घूमे तो उसका शीर्ष एक ⊙ बनायेगा।

(४) आकाश के किसी बिन्दु में से तीन से अधिक परस्पर लम्ब रेखाएँ नहीं खींची जा सकती।

(५) किसी समतल के किसी अभिलम्ब के पद के मध्येन, यदि समतल पर एक लम्ब खींचा जाय तो वह समतल मे ही स्थित होगा।

(६) सिद्ध करो कि,

(क) आकाश के समस्त बिन्दु जो दो निर्दिष्ट बिन्दुओ से समदूरस्थ हों, एक समतल मे स्थित होते हैं।
(बनारस १९४१)

(ख) आकाश के समस्त बिन्दु जो तीन विषमरैखिक बिन्दुओं से समदूरस्थ हों, एक सरल रेखा पर स्थित होंगे।

(ग) आकाश में केवल एक ही बिन्दु ऐसा होता है जो चार विषमतलस्थ बिन्दुओं से समदूरस्थ हो।
(बनारस १९३४)

(७) सिद्ध करो कि किसी निर्दिष्ट सरल रेखा पर प्रायः एक ही बिन्दु ऐसा होता है जो दो निर्दिष्ट बिन्दुओं से समदूरस्थ हो। अपवादी दशायें इंगित करो।

(८) किसी निर्दिष्ट समतल पर स्थित उन बिन्दुओं की निधि ज्ञात करो जो दो निर्दिष्ट बाह्य बिन्दुओं से समदूरस्थ हों।

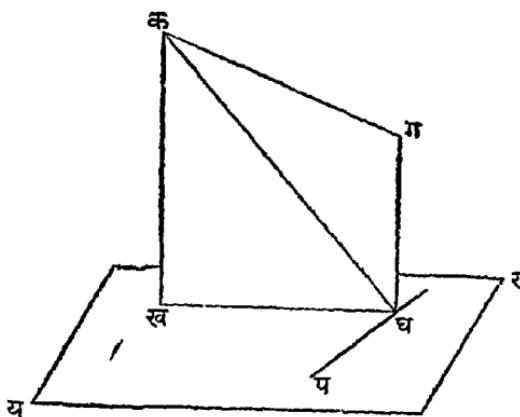
(९) एक बिन्दु से दो छेदक समतलों पर लम्ब डाले गये हैं सिद्ध करो कि उनका समतल दोनों समतलों के युगल काट पर लम्ब होगा।

(१०) दो समतलों का युगल काट **क ख** है। **क ख** के किसी बिन्दु **प** के मध्येन **प फ**, **प ब**, क्रमशः दोनों समतलों में **क ख** पर लम्ब डाले गये हैं। सिद्ध करो कि **प फ** के किसी बिन्दु के मध्येन **क ख**, **प फ** के समतल पर डाला गया लम्ब **प फ**, **प ब** के समतल पर स्थित होगा।

(बनारस १९३६)

(११) यदि तीन समतलो के काट परस्पर ॥ हों तो किसी बाह्य बिन्दु से इन समतलो पर डाले गये लम्ब समतलस्थ होंगे।

साध्य १०

दो समानान्तर सरल रेखाओं में से, यदि एक किसी समतल पर लम्ब है, तो दूसरी भी लम्ब होगी।

चित्र १७

मान लो कि क ख, ग घ दो ‖ सरल रेखाएँ हैं।

मान लो कि य र एक समतल है जिस पर क ख ⊥ है।

तो यह सिद्ध करना है कि ग घ ⊥ समतल य र।

ख घ को जोड़ो और समतल य र में ख घ पर घ प ⊥ डालो।

क ग, क घ को जोड़ो।

∵ क ख ‖ ग घ

∴ क ख घ ग एक समतल है।

अस्तु. समतल क ख घ ग में चूँकि क ख ⊥ ख घ, इस लिये ग घ ⊥ ख घ।

३

अब, क ख ⊥ समतल य र, और ख ब ⊥ ब प

∴ क घ ⊥ घ प (साध्य ५)

फिर, घ प ⊥ घ ख, घ क

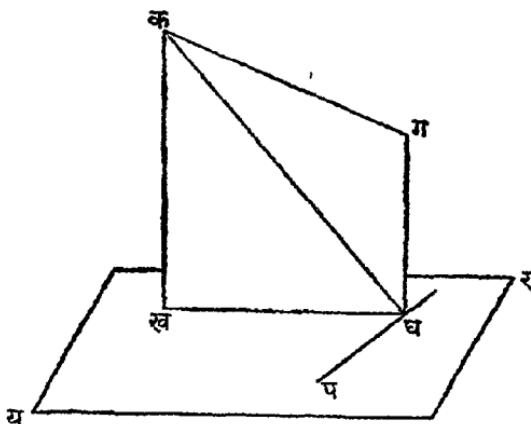
∴ घ प ⊥ समतल क ख ब ग (साध्य ४)

अस्तु घ प ⊥ ब ग।

अन्त में, ∵ ग ब ⊥ घ ख, ब प

∴ ग ब ⊥ समतल य र। (साध्य ४)

साध्य ११

सरल रेखाएँ जो एक ही समतल पर लम्ब हों, समानान्तर होंगी।

चित्र १८

मान लो कि क ख, ग घ दो सरल रेखाएँ हैं जो समतल य र पर ⊥ हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि क ख ‖ ग घ।

ख घ को जोड़ो, और समतल य र में घ प ⊥ डालो घ ख पर।

क ग, क घ को जोड़ो।

∵ ग घ ⊥ समतल य र, अस्तु, ग घ ⊥ घ प।

अब, क ख ⊥ समतल य र, और ख घ ⊥ घ प

∴ क घ ⊥ घ प। (साध्य ५)

फिर, घ प ⊥ घ ख, घ क, घ ग।

∴ घ ख, घ क, घ ग समतलस्थ हैं। (साध्य ६)

अर्थात, क ख घ ग एक समतल है।

अन्त मे, समतल क ख घ ग में

∵ क ख, ग घ ⊥ समतल पर

∴ क ख, ग घ ⊥ ख घ

अतः क ख ‖ ग घ।

अभ्यास ८

(१) तुम्हारे कमरे मे स्थित किसी बिन्दु से फर्श और एक संलग्न दीवार पर लम्ब डाले गये हैं। बिन्दु के मध्येन, दीवार और फर्श के युगल काट के समानान्तर एक सरल रेखा खीची गई है। सिद्ध करो कि यह रेखा दोनों लम्बों के समतल पर लम्ब होगी।

(२) समानान्तर रेखाओं के एक समूह पर किसी बिन्दु से लम्ब डाले गये हैं। सिद्ध करो कि लम्बों के पदों को मिलाने वाली रेखाओं में से प्रत्येक, समानान्तर रेखाओं के उस जोड़े पर लम्ब होगी जिससे वह मिलती है।

अभ्यास ६

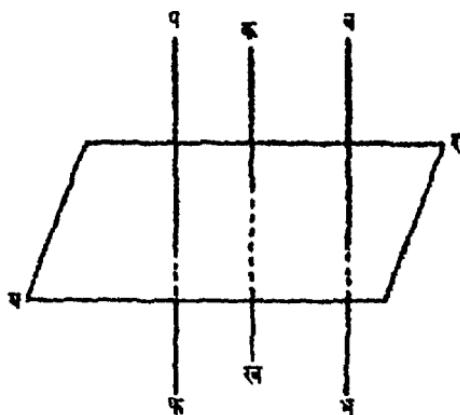
(१) किसी कमरे की दीवारों के युगल काट समानान्तर होते हैं।

(२) कार्यालय की मेज़ की टाँगें समानान्तर होती हैं।

(३) क ख, ग घ एक समतल पर $\perp$ हैं। सिद्ध करो कि क ग और ख घ के मध्यबिन्दुओं की संयोजक सरल रेखा भी समतल पर $\perp$ होगी।

साध्य १२

सरल रेखायें जो एक ही सरल रेखा के समानान्तर हों, आपस में भी समानान्तर होंगी।

चित्र १६

मान लो कि प फ, ब भ दो सरल रेखायें हैं जो एक ही सरल रेखा क ख के ‖ हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि प फ ‖ ब भ।

मान लो कि य र एक समतल है जो क ख पर ⊥ है।

अब, क ख ⊥ समतल य र, और प फ ‖ क ख

∴ प फ ⊥ समतल य र (साध्य १०)

इसी प्रकार, ब भ ⊥ समतल य र।

अब प फ, ब भ दोनों ⊥ समतल य र।

अस्तु प फ ‖ ब भ (साध्य ११)

अभ्यास १०

(१) किसी कुटिल चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं के मध्यबिन्दुओं की संयोजक रेखायें समतलस्थ होती हैं और एक समानाभुज बनाती हैं।

(अलीगढ़ १९३५)

(२) किसी कुटिल चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्यबिन्दुओं की संयोजक रेखाये एक दूसरे को समद्विभाजित करती हैं।

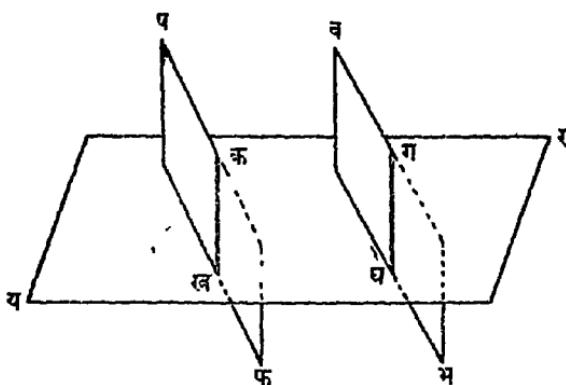
(३) अवकाश में स्थित तीन समान और समानान्तर सरल रेखाओं के सिरों को मिलाया गया है। सिद्ध करो कि इस प्रकार बने △ सर्वांगसम होंगे।

(४) दो समानाभुज क ख ग घ और क ख च छ एक ही आधार क ख पर, दो भिन्न तलों मे बने हैं। सिद्ध करो कि ग घ छ च भी एक समानाभुज है।

(५) समानान्तर सरल रेखाओं के किसी समूह पर किसी एक बिन्दु से डाले गये लम्ब समतलस्थ होते हैं।

(बनारस १९४०)

साध्य १३

यदि दो समानान्तर समतल किसी तीसरे समतल को काटे तो उनके युगल-काट समानान्तर होंगे।

चित्र २०

मान लो कि दो समानान्तर समतल प फ, ब भ तीसरे समतल 'य र को रेखाओं क ख, ग घ पर काटते हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि क ख ‖ ग घ।

∵ क ख और ग घ समानान्तर समतलों पर स्थित हैं, इसलिये चाहे जितनी बढ़ाई जायँ यह मिल नहीं सकतीं।

और यह रेखायें समतलस्थ भी हैं क्योंकि दोनों समतल य र पर स्थित हैं। अस्तु, क ख, ग घ समानान्तर हैं।

उपसाध्य १—यदि एक समतल समानान्तर समतलों के एक समूह को काटे तो कटान रेखायें ‖ होंगी।

२—यदि दो छेदक समतल क्रमशः दो अन्य छेदक समतलों के ‖ हों तो समतलों की पहली जोड़ी का युगल काट, दूसरी जोड़ी के युगल काट के ‖ होगा।

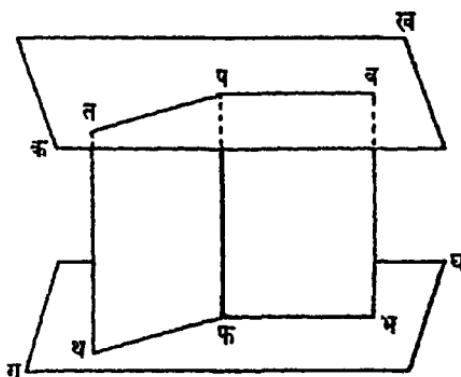
अभ्यास ११

(१) समानान्तर समतलों के मध्यस्थ, समानान्तर रेखाओं के अन्तःखण्ड समान होते हैं।

(२) दो समानान्तर समतलों को तीन समानान्तर रेखायें काटती हैं। कटान बिन्दुओं की संयोजक रेखाओं से बने △ सर्वांगसम होंगे।

(३) दो समानान्तर समतल तीन बिन्दुगामी विषमतलस्थ रेखाओं को काटते हैं। कटान बिन्दुओं की संयोजक रेखाओं से बने △ समरूप होंगे।

साध्य १४

यदि कोई सरल रेखा, दो समानान्तर समतलों में से एक पर लम्ब हो तो दूसरे पर भी लम्ब होगी।

चित्र २१

मान लो कि क ख, ग घ दो ‖ समतल हैं और निर्दिष्ट सरल रेखा प फ ⊥ समतल ग घ तो यह सिद्ध करना है कि प फ ⊥ समतल क ख।

मान लो कि प फ के मध्येन एक समतल प भ जाता है जो इन दोनों समतलों को रेखाओं प ब, फ भ में काटता है।

तो प ब ‖ फ भ (साध्य १३)

अब, समतल प भ में, प ब ‖ फ भ,

और प भ ⊥ फ भ (∵ प फ ⊥ समतल ग घ)

∵ प फ ⊥ प ब।

इसी प्रकार, प फ के मध्येन कोई दूसरा समतल लेकर हम सिद्ध कर सकते हैं कि प फ, समतल क ख में स्थित एक अन्य रेखा, प त पर भी ⊥ है।

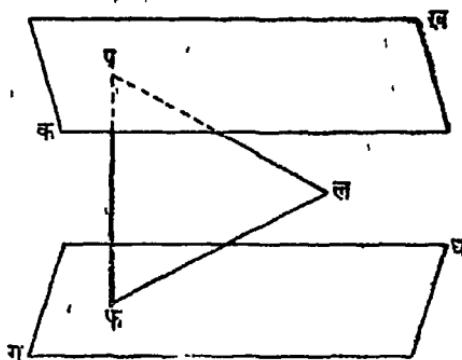
∴ प फ ⊥ समतल क ख। (साध्य ५)

अभ्यास १२

(१) मेज़ पर एक पेन्सिल सीधी खड़ी है। सिद्ध करो कि पेन्सिल की केन्द्रीय रेखा मेज़ के नीचे बढ़ाने से फ़र्श पर लम्ब होगी।

(२) दो समानान्तर समतलों की मध्यस्थ दूरी सब जगह समान रहती है।

साध्य १५

यदि एक सरल रेखा दो समतलों पर अभिलम्ब हो तो समतल समानान्तर होंगे ।

चित्र २२

मान लो कि क ख, ग घ दो समतल हैं जिनपर सरल रेखा **प फ** ⊥ है । तो यह सिद्ध करना है कि समतल समानान्तर हैं ।

यदि सम्भव हो तो, मान लो कि ल एक बिन्दु है जो दोनों समतलों में युगल हैं ।

ल प, ल फ को जोड़ो ।

अब, **प फ** ⊥ समतल **क ख,**

और सरल रेखा **प ल** समतल **क ख** में स्थित है ।

∴ **प फ** ⊥ **प ल** ।

इसी प्रकार, **प फ** ⊥ **फ ल** ।

अस्तु, △ **प फ ल** में दो कोण सम ∠ हो गये, जो कि असम्भव है । अस्तु, दोनों समतलों मे कोई बिन्दु युगल नहीं हो सकता ।

अर्थात् समतल समानान्तर हैं ।

परिचित उदाहरण

(१) बैलगाड़ी के पहिये और धुरी

(२) चकई

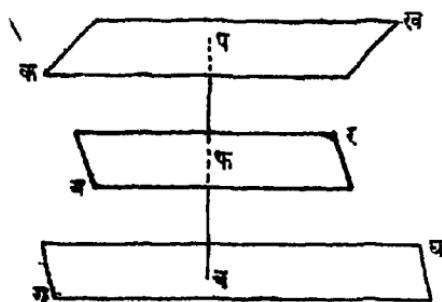
अभ्यास १३

(१) समतल जिनके अभिलम्ब समानान्तर होते हैं, आपस मे समानान्तर होते हैं।

(२) एक दिये हुए बिन्दु के मध्येन, एक समतल एक निर्दिष्ट समतल के समानान्तर, किस प्रकार खींचोगे ?

(३) किसी दिये हुये बिन्दु के मध्येन एक, और केवल एक ही, समतल खींचा जा सकता है जो एक निर्दिष्ट सरल रेखा पर $\perp$ हो।

साध्य १६

जो समतल किसी एक ही समतल के समानान्तर हो, आपस में भी समानान्तर होंगे।

चित्र २३

मान लो कि दो समतल क ख, ग घ एक तीसरे समतल य र के ॥ हैं। तो यह सिद्ध करना है कि समतल क ख ॥ समतल ग घ।

मान लो कि प फ ब एक सरल रेखा है जो समतल य र पर ⊥ है और तीनों समतलों को क्रमशः प, फ, ब पर काटती है।

अब समतल क ख, य र ॥ हैं, और प फ ब ⊥ समतल य र।

∴ प फ ब ⊥ समतल क ख। (साध्य १४)

इसी प्रकार, प फ ब ⊥ समतल ग घ।

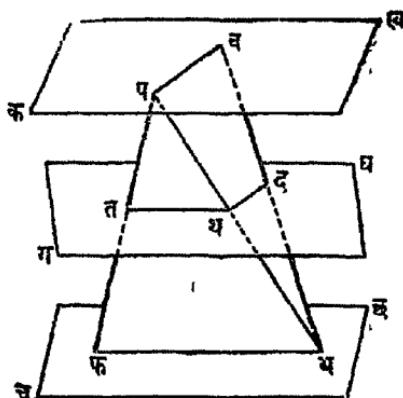
अब, क ख, ग घ दो समतल हैं जो एक ही रेखा प फ ब पर ⊥ हैं, अस्तु, यह समतल ॥ हैं। (साध्य १५)

अभ्यास १४

(१) श्याम पट्ट के समानान्तर खींचा गया समतल सम्मुख दीवार के भी समानान्तर होता है।

(२) किसी बराम्दे की छत के समानान्तर एक शामियाना गाड़ा गया है। सिद्ध करो कि उसे कितना ही क्यों न बढ़ायें, वह धरती को कभी नहीं छुयेगा।

साध्य १७

सरल रेखाओं को समानान्तर समतल समानुपात में काटते हैं।

चित्र २४

मान लो कि क ख, ग घ, च छ तीन समानान्तर समतल हैं जो दो सरल रेखाओं प फ, ब भ को प, त, फ, और ब, द, भ पर काटते हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि प त : त फ=ब द : द भ।
प भ, को जोड़ो और मान लो कि वह समतल ग घ, को थ पर काटती है।

त थ, थ द को जोड़ो।

अब, समानान्तर समतल ग घ, च छ समतल प फ भ को रेखाओं त थ, फ भ पर काटते हैं।

∴ त थ ‖ फ भ। (साध्य १२)

अस्तु, △ प फ भ में, प त : त फ=प थ : थ भ

फिर, समानान्तर समतल क ख, ग घ समतल प ब भ को रेखाओं प ब, थ द पर काटते हैं।

प ब ‖ थ द।　　　　　　　　　　　　　　　　(साध्य, १३)

अस्तु, △ प ब भ में प थ : थ भ = ब द : द भ।

∴ प त : त फ = ब द : द भ।

अभ्यास १५

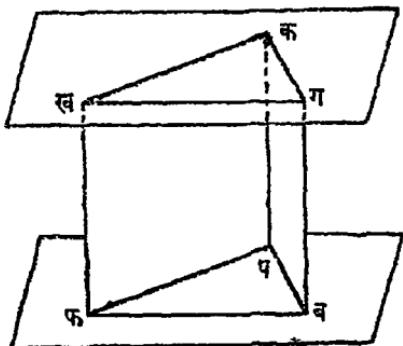
(१) दो समानान्तर समतल दिये हैं। उस बिन्दु की निधि ज्ञात करो जो उनसे सदैव समदूरस्थ रहता है।

(२) तीन समानान्तर समतल एक सरल रेखा पर समान अन्तःखण्ड बनाते हैं। सिद्ध करो कि किसी अन्य सरल रेखा पर भी वह समान अन्तःखण्ड ही बनायेंगे।

(३) क एक स्थिर बिन्दु है और प किसी समतल पर एक गतिशील बिन्दु है। क प के समत्रिभाजक बिन्दुओं की निधियाँ ज्ञात करो।

(४) चित्र २४ मे, यदि ब फ समतल ग घ को ध पर काटे तो सिद्ध करो कि त थ द ध एक समानाभुज होगा।

साध्य १८

यदि दो छेदक रेखाये क्रमशः समानान्तर हो दो अन्य छेदक रेखाओं के, जो उनसे समतलस्थ न हों, तो रेखाओं की पहिली जोड़ी का मध्यस्थ कोण दूसरी जोड़ी के मध्यस्थ कोण के बराबर होगा।

चित्र २५

मान लो कि दो सरल रेखाये क ख, क ग क्रमशः दो अन्य रेखाओं प फ, प ब के ‖ हैं जो उनसे समतलस्थ नहीं हैं।

तो यह सिद्ध करना है कि ∠ख क ग = ∠फ प ब।

क ख, प फ को बराबर काट लो, और क ग, प ब को भी बराबर काट लो।

ख ग, फ ब, क प, ख फ, ग ब को जोड़ो।

अब, क ख = और ‖ प फ।

∴ ख फ = और ‖ क प।

इसी प्रकार, ग ब = और ‖ क प।

अस्तु ख फ = और ‖ ग ब।   (साध्य १२)

∴ ख ग = और ‖ फ ब।

अब, △ों क ख ग, प फ ब मे एक की तीनों भुजाये क्रमशः बराबर हैं दूसरे की तीनों भुजाओ के।

∴ △ सर्वांगसम हैं

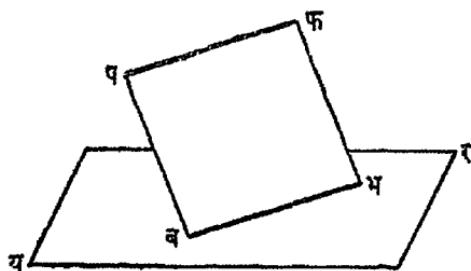
अस्तु, ∠ ख क ग = ∠ फ प ब।

अभ्यास १६

(१) दो समतलों का युगल काट य र है। दो समानान्तर समतल इन समतलों को क ख, क ग और च छ, च ज पर काटते हैं। सिद्ध करो कि कोण ख क ग और छ च ज समान हैं।

(२) मेज़ पर एक किताब इस प्रकार रक्खो कि जिल्द का सिरा खड़ा रहे और पुस्तक अधखुली रहे। सिद्ध करो कि पुस्तक के ऊपर और नीचे के सिरों पर, खुले पृष्ठों के मध्यस्थ बने कोण समान हैं।

साध्य १९

यदि कोई सरल रेखा किसी समतल पर खिंची एक सरल रेखा के समानान्तर हो तो समतल के भी समानान्तर होगी।

चित्र २६

मान लो कि प फ एक सरल रेखा है जो समतल य र में पड़ी एक सरल रेखा ब भ के ‖ है।

तो यह सिद्ध करना है कि प फ ‖ समतल य र।

∵ सरल रेखायें प फ, ब भ समानान्तर हैं, अस्तु समतल-स्थ भी हैं।

मान लो कि भ ब प फ उनका समतल है।

तो ब भ दोनों समतलों का युगल काट हो गई।

अब, इन समतलों के समस्त युगल बिन्दु ब भ में स्थित होंगे।

(साध्य ३)

अस्तु, यदि प फ समतल य र से मिलेगी तो किसी ऐसे बिन्दु पर मिलेगी जो ब भ पर स्थित हो।

परन्तु, ब भ से तो वह मिल ही नहीं सकती क्योंकि उसके ‖ है।

अस्तु, वह समतल य र से मिल ही नहीं सकती।

अर्थात्, प फ ‖ समतल य र।

उपसाध्य—दो कुटिल रेखाओं में से किसी एक के मध्येन एक समतल खींचा जा सकता है जो दूसरी के समानान्तर हो।

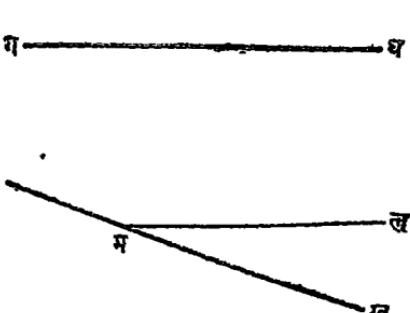
अभ्यास १७

(१) एक बिन्दु, एक रेखा और एक समतल दिये हैं। बिन्दु के मध्येन एक रेखा खींचो जो न्यस्त रेखा को काटे और समतल के समानान्तर हो।

यह कब असम्भव है?

(२) दो बिन्दु एक समतल से समदूरस्थ और उसके एक ही ओर हैं। सिद्ध करो कि उनकी सयोजक रेखा समतल के समानान्तर है।

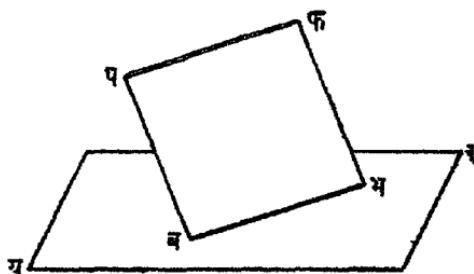
(३) मा पा, मा फा दोनों ⊥ मा बा। यदि बा भा भी ⊥ मा बा, तो बा भा ‖ समतल पा मा फा।

(४) यदि इस साध्य की प्रतिज्ञा हम इस प्रकार लिखे कि 'यदि दो समानान्तर रेखाओं मे से एक किसी समतल मे समाविष्ट है तो दूसरी भी समाविष्ट होगी' तो क्या तुम इस साध्य का कोई अपवाद बता सकते हो?

परिभाषा—मान लो कि क ख, ग घ दो कुटिल सरल रेखायें हैं। उनमें से एक—क ख—में कोई बिन्दु म लो। म में से म ल खींचो ग घ के समानान्तर। तो ∠ ख म ल इन कुटिल रेखाओं का मध्यस्थ कोण कहलायेगा।

चित्र २७

साध्य २०

यदि एक सरल रेखा किसी समतल के समानान्तर है और एक अन्य समतल रेखा के मध्येन जाता है और समतल को काटता है तो कटान रेखा न्यस्त रेखा के समानान्तर होगी।

चित्र २८

मान लो कि प फ एक सरल रेखा है जो समतल य र के ‖ है।

मान लो कि एक समतल प फ में से होकर जाता है और समतल य र को रेखा ब भ पर काटता है।

तो यह सिद्ध करना है कि प फ ‖ ब भ।

प फ और ब भ मिल नहीं सकतीं क्योंकि प फ ‖ समतल य र जिस में ब भ स्थित है।

और प फ, ब भ समतलस्थ भी हैं।

अस्तु, यह रेखायें समानान्तर हैं।

अभ्यास १८

(१) एक सरल रेखा दो न्यस्त समतलो के समानान्तर है। सिद्ध करो कि रेखा के मध्येन खींचा गया कोई समतल दोनों समतलों को समानान्तर रेखाओं मे काटेगा।

(२) यदि दो समानान्तर रेखाओं मे से एक किसी समतल के समानान्तर है, त दूसरी भी होगी। एक अपवाद बताओ।

(३) यदि दो समानान्तर समतलो मे से एक किसी रेखा के समानान्तर है तो दूसरा भी होगा। एक अपवाद बताओ।

(४) दो समतल परस्पर काटते हैं, उनमें से एक के समानान्तर दूसरे पर किस प्रकार रेखाये खीचोगे ?

(५) एक सरल रेखा दो छेदक समतलों के ॥ है। सिद्ध करो कि वह उनके समतल काट के भी ॥ है।

(६) प्रश्न (५) का विलोम लिखो और सिद्ध करो। इस प्रकार दर्शाओ कि दो छेदक समतलों के समानान्तर, किसी बिन्दु मध्येन एक रेखा किस प्रकार खींची जा सकती है।

(७) किसी न्यस्त बिन्दु के मध्येन एक समतल खींचा जा सकता है जो दो दी हुई कुटिल रेखाओं के ॥ हो।

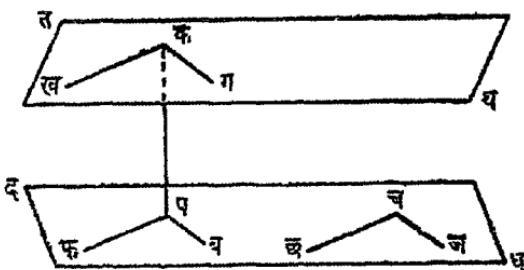
(८) एक समतल दो छेदक समतलों के युगल काट के ॥ है। सिद्ध करो कि तीनों कटान रेखाये परस्पर ॥ हैं।

(९) एक रेखा एक समतल के ॥ है। यदि समतल के किसी बिन्दु में से न्यस्त रेखा के ॥ एक रेखा खीची जाय तो वह समतल में ही स्थित होगी।

(१०) दो छेदक समतल क्रमश दो ॥ रेखाओं के मध्येन जाते हैं। सिद्ध करो कि दोनो रेखायें उनके युगल काट के भी ॥ होंगी।

साध्य २१

यदि दो छेदक रेखायें क्रमशः दो अन्य छेदक रेखाओं के, जो उनसे समतलस्थ न हों, समानान्तर हों तो रेखाओं की पहली जोड़ी का समतल दूसरी जोड़ी के समतल के समानान्तर होगा।

चित्र २६

मान लो कि रेखायें क ख, क ग ‖ क्रमशः ‖ हैं रेखाओं च छ, च ज के, जो उनसे समतलस्थ नहीं हैं।

मान कि क ख, क ग का समतल त थ है और च छ, च ज का समतल द ध।

तो यह सिद्ध करना है कि समतल त थ ‖ समतल द ध।

क से समतल द ध पर क प ⊥ डालो और लम्ब के पादबिन्दु प से प फ, प ब खींचो क्रमशः च छ, च ज के ‖।

अब, क ख ‖ च छ, और प फ ‖ च छ।

∴ क ख ‖ प फ। (साध्य १२)

और क प ⊥ प फ (∴ क प ⊥ समतल द ध।)

∴ क प ⊥ क ख।

इसी प्रकार, क प ⊥ क ग।

अस्तु, क प ⊥ समतल त थ। (साध्य ४)

अब दोनों समतलों त थ, द ध पर एक ही रेखा क प ⊥ है।

∴ यह समतल समानान्तर हैं। (साध्य १५)

अभ्यास १६

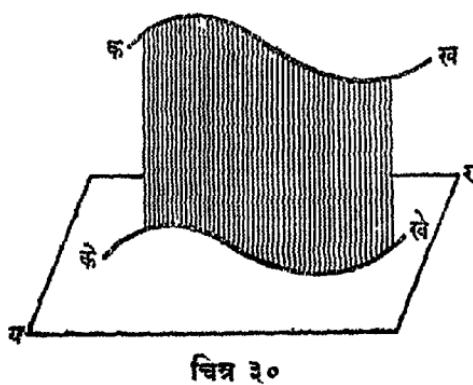
(१) यदि दो छेदक रेखायें एक समतल के ‖ हैं तो उनका समतल भी इसके ‖ होगा।

(२) प्रश्न (१) में कोई रेखा जो दोनों रेखाओं को काटती है, समतल के ‖ होगी।

(३) दो दी हुई कुटिल रेखाओं के मध्येन ‖ समतलों का एक, और केवल एक ही जोड़ा खींचा जा सकता है।

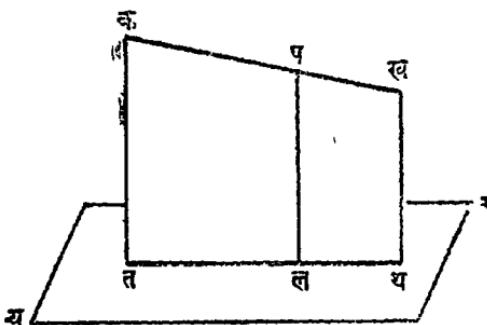
(४) एक दिये हुये बिन्दु के मध्येन एक रेखा किस प्रकार खीचोगे जो दो न्यस्त कुटिल रेखाओं पर ⊥ हो ?

विक्षेप

यदि किसी रेखा के समस्त बिन्दुओं से किसी समतल पर लम्ब डाले जाये तो उनके पाद बिन्दुओं की निधि को, उस समतल पर, उस रेखा का **विक्षेप** कहते हैं।

चित्र ३०

चित्र ३० में के खे रेखा क ख का समतल य र पर विक्षेप है।

साध्य २२

एक समतल पर किसी सरल रेखा का विक्षेप सरल रेखा ही होगा ।

चित्र ३१

मान लो कि य र एक समतल है और क ख एक सरल रेखा ।

तो यह सिद्ध करना है कि य र पर क ख का विक्षेप सरल रेखा ही होगी ।

मान लो कि क ख पर प कोई बिन्दु है ।

क त, ख थ, प ल समतल य र पर ⊥ डालो जो उसको क्रमशः त, थ, ल पर काटे ।

अब, चूंकि क त, ख थ, प ल एक ही समतल य र पर ⊥ हैं । इसलिए ‖ हैं । (साध्य ११)

और इन तीनो ‖ रेखाओं को एक ही रेखा क प ख काटती है ।

अस्तु, ये चारों रेखाये समतलस्थ हैं (साध्य २)

अतः, बिन्दु त, ल, थ समतलो य र, क ख थ त की कटान रेखा पर स्थित होंगे ।

परन्तु, प सरल रेखा क ख पर कोई बिन्दु है ।

अस्तु, क ख के किसी बिन्दु का विक्षेप कटान रेखा त ल थ पर ही पड़ेगा । अर्थात्, क ख का विक्षेप त थ है ।

अपवाद—यदि क ख ⊥ समतल य र, तो विक्षेप एक बिन्दु होगा।

उपसाध्य १—एक सरल रेखा और उसका विक्षेप सदैव समतलस्थ होते हैं।

२—यदि एक सरल रेखा किसी समतल के ‖ हो तो अपने विक्षेप के भी ‖ होगी।

अभ्यास २०

(१) एक समतल के दो अभिलम्ब, जो एक ही रेखा को काटते हैं, समतलस्थ होते हैं।

(२ किसी समतल पर समान तिर्यकों के विक्षेप समान होते हैं। [देखो अभ्यास ६ (२)]

(३) किसी रेखा के मध्य बिन्दु का विक्षेप उसके विक्षेप का मध्य बिन्दु होता है।

(४) किसी समतल पर बिन्दुओं **प**, **फ** से डाले गये लम्बों की लम्बाइयाँ **पि**, **फि** हैं। सिद्ध करो कि **प फ** के मध्य बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई $\frac{1}{2}$ (**पि** + **फि**) है।

(५) एक सरल रेखा अपने एक सिरे के चारों ओर घूमती है और सदैव एक न्यस्त समतल के ‖ रहती है। सिद्ध करो कि वह एक समतल की सृष्टि करती है जो दिये हुए समतल के ‖ है।

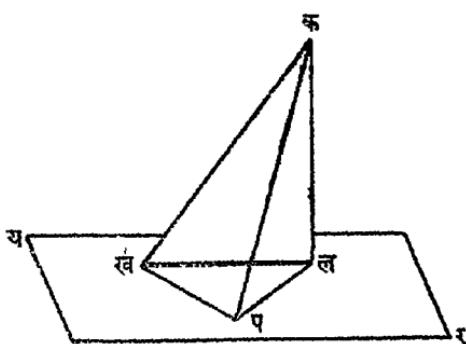
परिचित उदाहरण—(क) घड़ी की सुइयाँ घड़ी के मुँह के ‖ समतल बनाती हैं।

(ख) छत के पखे की भुजाये छत के ‖ एक समतल बनाती हैं।

(६) समानान्तर रेखायें एक ऐसे समतल पर किस प्रकार निरूपित होगी जो (क) उनके ‖ है, (ख) उन पर ⊥ है, (ग) उनसे कोई कोण बनाता है, (घ) उनके समतल पर ⊥ है।

साध्य २३

एक रेखा किसी समतल पर खींचे गये अपने विक्षेप से जो कोण बनाती है, वह उस कोण से कम होगा जो वह उस समतल पर स्थित अन्य किसी रेखा से बनायेगी।

चित्र ३२

न्यस्त एक समतल य र और एक सरल रेखा क ख जिसका विक्षेप इस समतल पर ख ल है।

सिद्ध करना : ∠ क ख ल < ∠ क ख प जो क ख इस समतल पर स्थित किसी और रेखा से बनाती हैं।

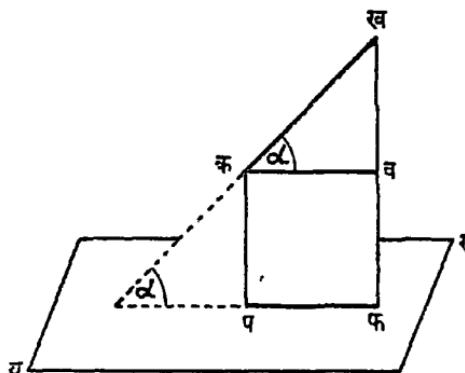
ख ल के बराबर ख प काट लो।

क प, ल प को जोड़ो।

△ क ल ख, क प ख में, ख ल = ख प, क ख युगल है, परन्तु पहिले △ की तीसरी भुजा क ल < दूसरे △ की तीसरी भुजा क प से। [अभ्यास ६ (१)]

∴ ∠ क ख ल < ∠ क ख प।

एक सरल रेखा और एक समतल के मध्यस्थ कोण का नाप वह कोण होता है जो रेखा उस समतल पर खींचे गये अपने विक्षेप से बनाती है।

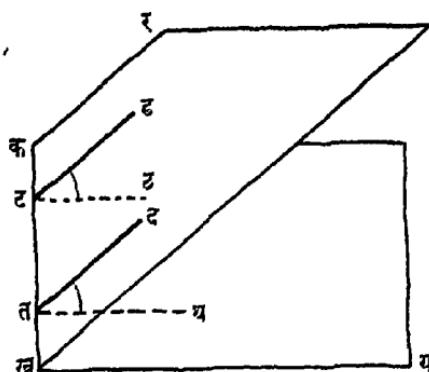
उपसाध्य—मान लो कि **क ख** एक सरल रेखा है जिसका विक्षेप एक समतल **य र** पर **प फ** है। तो चित्र से स्पष्ट है कि **प फ=क ब=क ख** कोज ∝, जबकि ∝ वह कोण है जो **क ख** समतल से बनाती है।

चित्र २३

एक तिरछे समतल पर खिंची एक रेखा जो क्षैतिज समतल से बड़े से बड़ा कोण बनाती है, **महत्तम ढ़ाल रेखा** कहलाती है।

द्वितल कोण

दो समतल जो एक सरल रेखा पर काटते हैं, एक द्वितल कोण बनाते हैं।

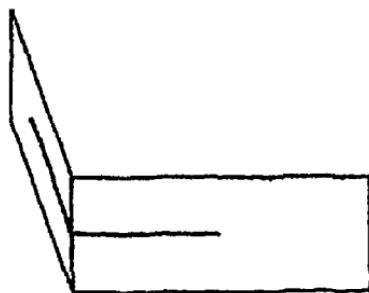
मान लो कि दो समतलों क य, ख र की कटान रेखा क ख है।

मान लो कि क ख पर ट कोई बिन्दु है।

दोनों समतलों में क्रमशः ट ठ, ट ड ⊥ डालो क ख पर। तो समतलों के द्वितल कोण का नाप ∠ ठ ट ड होगा।

चित्र ३६

यदि क ख में त कोई और बिन्दु है और त थ, त द संगत ⊥ हैं,

तो ∠ थ त द = ∠ ठ ट ड (साध्य १८)

यदि द्वितल कोण सम ∠ हो तो समतल परस्पर लम्ब कहलाते हैं।

चित्र ३७

अभ्यास २४

(१) यदि एक समतल दूसरे पर खड़ा है तो इस प्रकार बने दोनो द्वितल कोण ऋजुपूरक होंगे।

(२) यदि दो समतल परस्पर काटें तो सम्मुख शीर्ष कोण समान होंगे।

(३) यदि एक समतल दो ॥ समतलों को काटे तो :—

(क) संगत द्वितल कोण बराबर होंगे।

(ख) एकान्तर द्वितल कोण बराबर होंगे।

(ग) दो सम्मुख अन्तर्द्वितल कोणों का योग दो समकोण होगा।

(४) दो समतलों का अन्तर्गत कोण दो समानान्तर समतलो के अन्तर्गत कोण के समान होता है।

(५) यदि तीन समतलों की कटान रेखाये ॥ हों तो इस प्रकार बने अन्तर्द्वितल कोणों का योग १८०° होगा।

(६) एक कमरे का फर्श का खा गा घा और छत की खी गी घी है। यदि का खा =५, खा गा =३, खा खी =४ तो

(क) की खी गा घा और फर्श,

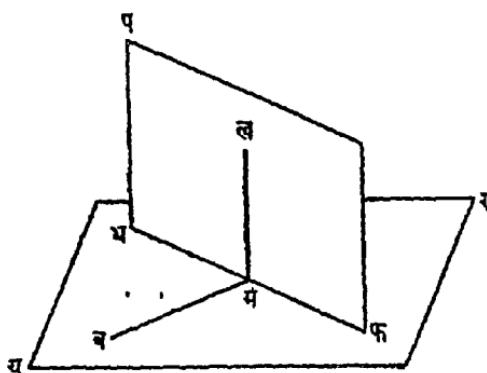
(ख) की खा गा घी और फर्श

के अन्तर्गत द्वितल कोण की कोज्या निकालो।

(७) दो छेदक समतलों का मध्यस्थ द्वितल कोण उनके अभिलम्बो के मध्यस्थ सरलरेखात्मक कोण के समान होगा या उसका ऋजु पूरक होगा।

(८) साध्य २४ के दो अपवाद बताओ।

साध्य २६

यदि कोई सरल रेखा एक समतल पर लम्ब है तो उसके मध्येन खींचा गया कोई समतल भी उस समतल पर लम्ब होगा।

चित्र ३८

दिया हुआ : एक सरल रेखा ल म ⊥ एक समतल य र।

मान लो कि प फ लम्ब ल म के मध्येन कोई समतल खींचा गया है जो समतल य र को भ फ पर काटता है।

सिद्ध करना : समतल प फ ⊥ समतल य र।

समतल य र में फ भ पर म ब ⊥ डालो।

∵ ल म ⊥ समतल य र, अस्तु ल म ⊥ भ फ।

और म ब ⊥ भ फ।

∴ दोनों समतलों के मध्यस्थ द्वितल कोण का नाप ∠ ल म ब हुआ।

परन्तु ल म ⊥ म ब, अर्थात् ∠ ल म ब = एक सम ∠।

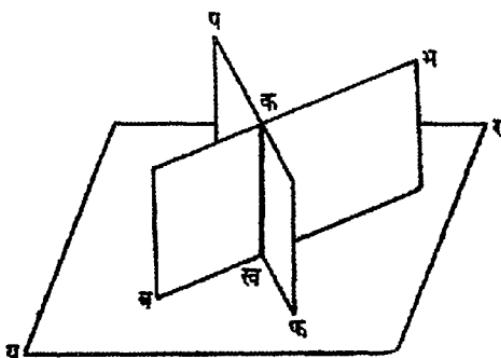
अतः, समतल परस्पर ⊥ हैं।

उपसाध्य १—दो परस्पर ⊥ समतल **प फ**, **य र** रेखा **भ फ** पर मिलते हैं। समतल **प फ** के किसी बिन्दु **ल** से युगल काट **भ फ** पर **ल म** ⊥ डाला गया है, तो **ल म** ⊥ समतल **य र**।

२—दो परस्पर ⊥ समतल **प फ**, **य र** रेखा **भ फ** पर मिलते हैं। समतल **प फ** के किसी बिन्दु **ल** से समतल **य र** पर **ल म** ⊥ डाला गया है। तो **ल म** समतल **प फ** में स्थित होगा।

साध्य २७

यदि दो छेदक समतल किसी तीसरे समतल पर लम्ब हों तो उनका युगल काट भी उस पर लम्ब होगा।

चित्र ३१

न्यस्त : दो छेदक समतल प फ, ब भ—दोनो तीसरे समतल य र पर ⊥।

सिद्ध करना : उनका युगल काट क ख ⊥ समतल य र।

समतल प फ ⊥ समतल य र

और समतल प फ में क कोइ बिन्दु है।

अस्तु, यदि क से समतल य र पर एक ⊥ डाला जाय तो वह समतल प फ में स्थित होगा। (साध्य २६ उपसाध्य २)

इसी प्रकार, समतल य र पर क से डाला गया ⊥ समतल ब भ में भी स्थित होगा

अर्थात्, लम्ब दोनों समतलो में स्थित होगा।

परन्तु, समतलों प फ, ब भ में केवल क ख ही युगल रेखा है।

अस्तु क ख ⊥ समतल य र।

अभ्यास २६

(१) यदि तीन समतल परस्पर ⊥ हों तो उनकी तीनों कटान रेखायें भी परस्पर ⊥ होंगी।

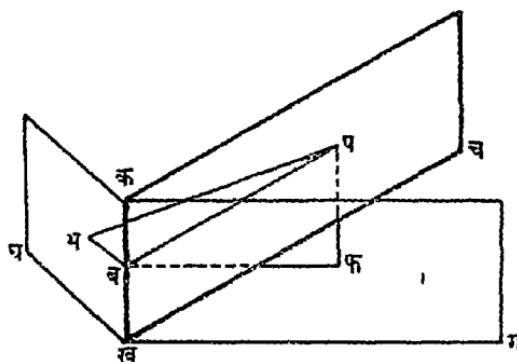
(२) एक बाह्य बिन्दु से दो छेदक समतलों पर ⊥ डाले गये हैं। सिद्ध करो कि उनका समतल दोनों समतलों के युगल काट पर ⊥ होगा।

(३) किसी समतल पर कई समतल ⊥ हैं। सिद्ध करो कि उनकी कटान रेखायें भी न्यस्त समतल पर ⊥ होंगी।

(४) वह समतल जो दो छेदक समतलो पर ⊥ हो, परस्पर ‖ होंगे।

(५) दो रेखाओं क ख, क ग के बिन्दुओं ख, ग के मध्येन दो समतल खींचे गये हैं जो क्रमशः क ख, क ग पर ⊥ हैं। सिद्ध करो कि इन समतलो की कटान रेखा समतल क ख ग पर ⊥ होगी।

साध्य २८

उस बिन्दु की निधि निकालना जो दो छेदक समतलो से समान दूरी पर रहता है।

चित्र ४०

दिया हुआ दो समतल क ग, क घ जो रेखा क ख पर मिलते हैं।

तो उस बिन्दु की निधि ज्ञात करना है जो इन दोनों समतलो से समान दूरी पर रहता है।

मान लो कि समतल क च इन दोनो समतलों के मध्यस्थ द्वितल कोण को अधियाता है।

तो समतल क च ही अभीष्ट निधि होगा।

मान लो कि समतल क च में प कोई बिन्दु है।

समतलों क ग, क घ पर प फ, प भ ⊥ डालो जो उनसे फ, भ पर मिले।

फ से क ख पर फ ब ⊥ डालो।

ब प, ब भ को जोड़ो।

अब, प फ ⊥ समतल क ग,

और फ ब ⊥ क ख जो समतल क ग में एक रेखा है ।

∴ प ब ⊥ क ख ।　　　　(साध्य ५)

फिर,　प भ ⊥ समतल क घ,

और　प ब ⊥ क ख जो समतल क घ में एक रेखा है ।

∴ ब भ ⊥ क ख ।　　　　(साध्य ५, विलोम)

अब, ∵ ब फ, ब भ दोनों क ख पर ⊥ हैं ।

∴ ∠ फ ब भ समतलों क ग, क घ का मध्यस्थ द्वितल ∠ है ।

और चूँकि समतल क च इस कोण को अधियाता है

इसलिये,　∠ फ ब प = ∠ भ ब प

अन्त में, △ों प फ ब, प भ ब मे ∠ फ ब प = भ ब प, सम ∠ प फ ब = सम ∠ प भ ब और भुजा प ब युगल है ।

∴ △ सर्वांगसम हैं, अस्तु, प फ = प भ ।

नोट—निधि वह समतल भी हो सकता है जो समतलों क ग, क घ के मध्यस्थ बहिष्कोण को अधियाये ।

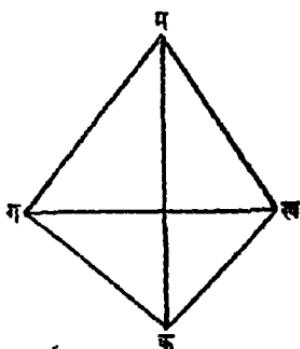
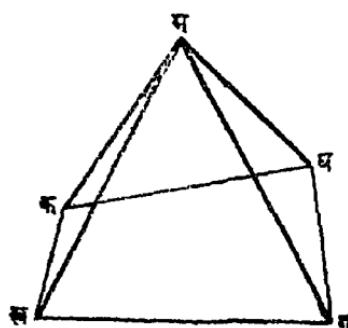
अभ्यास २७

(१) एक दी हुई रेखा पर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करो जो छेदक समतलों से समदूरस्थ हो। ऐसे बिन्दु कितने होंगे ?

अवकाश में ऐसे बिन्दुओ की निधि ज्ञात करो जो

(क) दो दिये हुये ‖ समतलो,
(ख) दो दी हुई छेदक सरल रेखाओ,
(ग) दो दी हुई ‖ सरल रेखाओ
से समदूरस्थ हों।

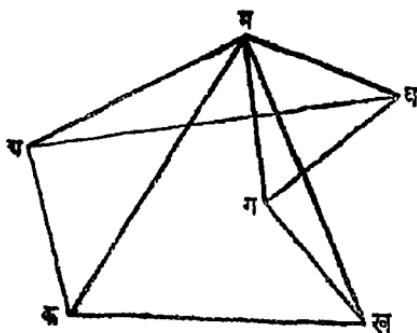
ठोस कोण

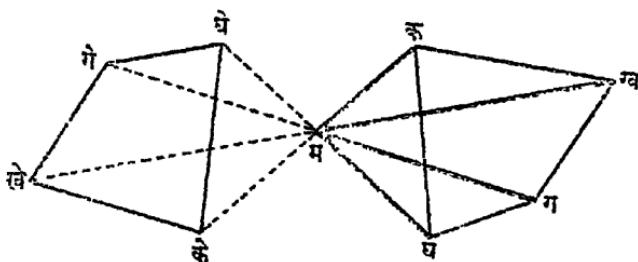
तीन या अधिक समतल जो एक बिन्दु पर मिलें, एक **ठोस कोण** बनाते हैं। कटान बिन्दु इस कोण का शीर्ष कहलाता है।

चित्र ४१ चित्र ४२

क्रमागत समतलों की कटान रेखाओं को **कोर** कहते हैं। चित्र में म क, म ख, म ग ··· कोर हैं। संलग्न कोरों के मध्यस्थ कोण क म ख, ख म ग...... ठोस कोण के **फलक कोण** कहलाते हैं। क्रमागत समतलो के मध्यस्थ कोण **द्वितल कोण** कहलाते हैं। समतलों क म ख, ख म ग का मध्यस्थ $\angle$ एक द्वितल $\angle$ है।

चित्र ४३

जिस ठोस कोण का कोई समतल काट एक उन्नतोदर बहुभुज हो, उसे **उन्नतोदर ठोस कोण** कहते हैं। चित्र ४२ का कोण उन्नतोदर है, चित्र ४३ का नतोदर।

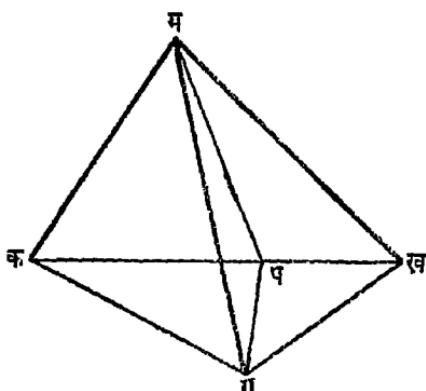
जिस ठोस कोण पर तीन समतल मिलें, **त्रितल कोण**

कहलाता है। जिस पर तीन से अधिक समतल मिले उसे बहुतल **कोण** कहते हैं।

यदि दो ठोस कोण ऐसे हो कि यदि एक को दूसरे पर छायें तो दोनों एक दूसरे में ठीक-ठीक बैठ जायें तो उन्हे **सर्वांगसम** कहते हैं।

चित्र ४४

चित्र ४४ में जो दो ठोस ∠ दिये हैं, उनमे से एक के फलक कोण और द्वितल कोण क्रमशः दूसरे के फलक और द्वितल कोणों के बराबर हैं। परन्तु उनमें से एक के शीर्षों का अनुक्रम क ख ग घ अर्थात् दक्षिणावर्त है, दूसरे का के खे गे वे अर्थात् उत्तरावर्त हैं। अस्तु, यह कोण एक दूसरे में नहीं बिठाये जा सकते। ऐसे दो ठोस कोण **विमुखी सम** कहलाते हैं।

दो ठोस कोण तभी सर्वांगसम होंगे जब न केवल एक के फलक कोण और द्वितल कोण क्रमशः दूसरे के फलक और द्वितल कोणों के बराबर हों वरन शीर्षों का अनुक्रम भी एक ही प्रकार का हो अर्थात् एक ही दिशा में हो।

साध्य २६

किसी त्रितल कोण मे कोई दो फलक कोण मिलकर तीसरे से बड़े होते हैं।

चित्र ४५

मान लो कि (म, क ख ग) एक त्रितल कोण है जिसका सब से बड़ा फलक ∠ क म ख इस पृष्ठ के समतल मे स्थित है।

तो यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि ∠ क म ग + ∠ ग म ख > ∠ क म ख।

समतल क म ख मे ∠ क म प बनाओ ∠ क म ग के बराबर, और म प काटलो म ग के बराबर।

उसी समतल मे प के मध्येन कोई रेखा क प ख खींचो जो म क, म ख को क ख पर काटे।

क ग, ख ग, प ग को जोड़ो।

अब △ों क म प, क म ग में क म युगल है, प म = ग म और मध्यस्थ ∠ क म प = मध्यस्थ ∠ क म ग।

∴ △ सर्वांगसम हैं, अस्तु क प=क ग।

अब, △ क ख ग में, क ग + ख ग > क ख।

अर्थात् > क प + प ख

∴ ख ग > प ख।

फिर, △ों ग म ख, प म ख में, ख म युगल है, ग म= प म, परन्तु तीसरी भुजा ग ख > तीसरी भुजा प ख।

∴ ∠ ग म ख > ∠ प म ख।

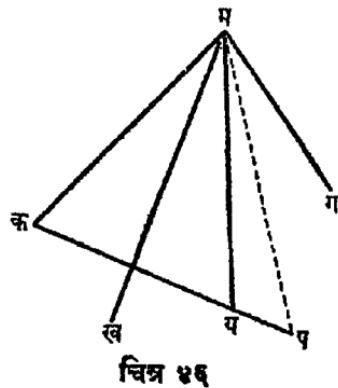
अस्तु, ∠ क म ग + ∠ ग म ख > ∠ क म प + ∠ प म ख।

अर्थात्, > ∠ क म ख।

उपसाध्य १— किसी त्रितल कोण में, किन्हीं दो फलक कोणों का अन्तर तीसरे कोण से कम होता है।

उपसाध्य २—म क, म ख, म ग तीन बिन्दुगामी रेखायें हैं जो समतलस्थ नहीं हैं। म य ठोस ∠ म के अन्दर कोई अन्य रेखा है। तो क म ख + ख म ग > क म य + य म ग

समतल क म य को बढ़ाओ ताकि समतल ख म ग से रेखा म प में मिले।

चित्र २६

अब, क म ख + ख म ग=क म ख+ख म प + प म ग

> क म प + प म ग

अर्थात्, क म ख + ख म ग > क म य + य म प + प म ग

> क म य + य म ग।

अभ्यास २८

(१) किसी उन्नतोदर ठोस कोण का कोई फलक कोण शेष फलक कोणों के योग से छोटा होता है।

(२) किसी कुटिल चतुर्भुज के कोणों का योग ४ सम कोण से कम होता है। (बनारस १६४३)

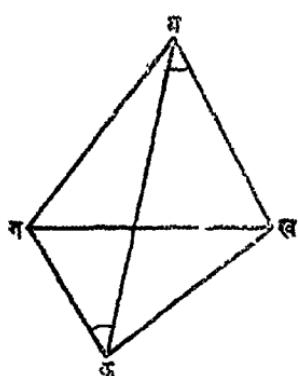
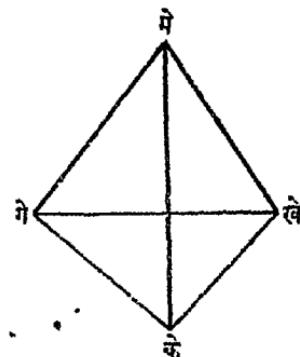
(३) चित्र ४६ मे सिद्ध करो कि

(क) क म य + ख म य + ग म य
> ½ (ख म ग + ग म क + क म ख)

(ग) ख म ग + ग म क + क म ख > क म य + ख म य + ग म य।

(४) सिद्ध करो कि यदि कोणों क म ख, क म ग का योग कोण ख म ग के बराबर हो तो म क, म ख, म ग समतस्थ होंगी।

साध्य ३०

दो त्रितल कोण सर्वांगसम होंगे यदि एक के फलक कोण क्रमशः दूसरे के फलक कोणों के, एक ही दिशा में, बराबर हो।

चित्र ४७

चित्र ४८

न्यस्तः दो त्रितल कोण (म, क ख ग) और (मे, के खे गे) जिनमें फलक ∠ ख म ग, ग म क, क म ख क्रमशः बराबर हैं फलक कोणों खे मे गे, गे मे के, के मे खे के।

सिद्ध करना : दोनों त्रितल ∠ सर्वांगसम हैं।

म क, मे के के बराबर बराबर काट लो।

समतलों क म ख, क म ग में क ख, क ग डालो क म पर ⊥; समतलों के मे खे, के मे गे में के खे, के गे डालो के मे पर ⊥।

ख ग, खे गे को जोड़ो।

अब, △ों क म ख, के मे खे में क म = के मे, ∠ क म ख = ∠ के मे खे और सम ∠ म क ख = सम ∠ मे के खे।

∴ △ सर्वांगसम हैं, अस्तु क ख = के खे, म ख = मे खे।

इसी प्रकार, क ग = के गे, ग म = गे मे।

फिर, △ों ख म ग, खे मे गे में ख म=खे मे, ग म=गे मे और मध्यस्थ ∠ ख म ग=मध्यस्थ ∠ खे मे गे।

∴ △ सर्वांगसम हैं, अस्तु ख ग=खे गे।

अन्त में, △ों क ख ग, के खे गे में एक की तीनों भुजायें क्रमशः दूसरे की तीनों भुजाओं के बराबर हैं।

∴ △ सर्वांगसम हैं, अस्तु ∠ ग क ख=∠ गे के खे।

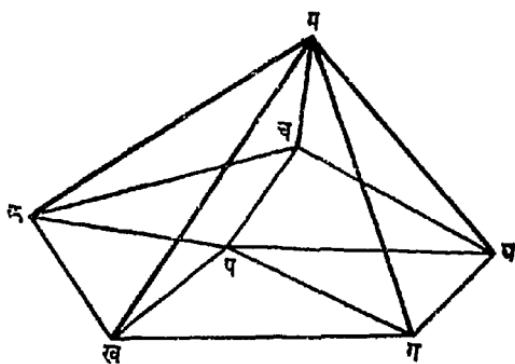
अर्थात् समतलों क म ग, क म ख का मध्यस्थ द्वितल ∠ बराबर है समतलों के मे गे, के मे खे के मध्यस्थ द्वितल ∠ के।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि शेष द्वितल ∠ भी बराबर हैं।

अस्तु, ठोस ∠ सर्वांगसम हैं।

साध्य ३१

एक उन्नतोदर ठोस कोण के फलक कोणों का योग चार सम कोणों से कम होता है।

चित्र ४६

न्यस्तः एक उन्नतोदर ठोस कोण (म, क ख ग घ च)।

सिद्ध करना : फलक ∠ क म ख + ख म ग + ग म घ + घ म च + च म क < ४ सम ∠।

मान लो कि एक समतल इस ठोस कोण के कोरों को क, ख, ग, घ, च पर काटता है।

तो क ख ग घ च एक उन्नतोदर बहुभुज हुआ।

क, ख, ग, घ, च को बहुभुज के किसी अन्तर्बिन्दु प से मिलाओ।

मान लो कि ठोस ∠ स समतलों से बना है, अर्थात् बहुभुज क ख ग घ च की भुजाओं की संख्या स है।

अस्तु, म पर स △ बने हैं जिनके समस्त ∠ों का योग
= २ स सम ∠

और, प पर भी स △ " " " "
= २ स सम ∠

∵ △ों क म ख, ख म ग...के आधार ∠ + म पर बने कोण
=बहुभुज के कोण क, ख, ग... + प पर बने कोण।

परन्तु, ∠ म ख क + म ख ग > बहुभुज के कोण ग से   (साध्य २६)

और, इसी प्रकार, बहुभुज के और शीर्षों पर भी।

अस्तु, △ों क म ख, ख म ग ..के आधार कोण
>बहुभुज के कोण क, ख, ग ...।

∴ म पर बने कोण < प पर बने कोण।

अर्थात्   < ४ सम कोण।

अभ्यास २६

(१) यदि तीन बिन्दुगामी रेखायें परस्पर ऐसे कोण बनायें जिनका योग ४ समकोण हो तो तीनों रेखायें समतलस्थ होंगी । (बनारस १९४०)

(२) अवकाश के किसी बिन्दु के मध्येन कई एक रेखायें खींची गई हैं । यदि क्रमागत रेखाओं के मध्यस्थ इस प्रकार बने कोणों का योग ४ समकोण हो तो समस्त रेखायें समतलस्थ होंगी ।

ठोस

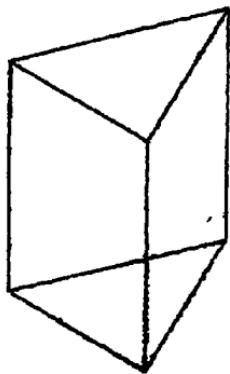
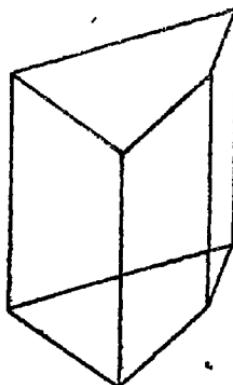
(१) समकोर

(१) अवकाश का कोई भाग जो एक या अधिक समतलों या विषमतलों से घिरा हो, **ठोस** कहलाता है।

बहुफलक उस ठोस को कहते हैं जो समतलों से घिरा हो। जिन तलों से एक बहुफलक घिरा हो, ठोस के **फलक** कहलाते हैं। आसन्न फलकों की कटान रेखा को **कोर** कहते है। तीन या अधिक कोरों के कटान बिन्दु को **शीर्ष** कहते हैं।

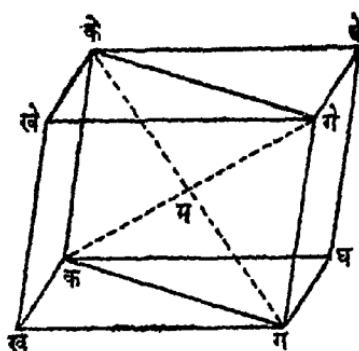
(२) **समकोर** उस बहुफलक को कहते हैं जिसमें दो फलक समानान्तर समतलों में सर्वांगसम ऋजुभुज हों और शेष फलक समानाभुज हों। वह दोनो फलक **आधार** कहलाते हैं। शेष फलकों को **भुजा फलक** कहते हैं।

एक समकोर जिसके आधार त्रिभुज, चतुर्भुज या बहुभुज हों, क्रमशः त्रिभुजी, चतुर्भुजी या बहुभुजी समकोर कहलाता है।

चित्र ९०

चित्र ९१

जिस समकोर के भुजा कोर आधारों पर लम्ब हों उसे लाम्बिक समकोर कहते हैं। अस्तु, एक लाम्बिक समकोर के भुजा फलक आयत होते हैं। शेष सब समकोर तिर्यक कहलाते हैं।

समानाफलक

(३) **समानाफलक** उस बहुफलक को कहते हैं जो समानान्तरसमतलों के तीन जोड़ों से घिरा हो। दूसरे शब्दों में, समानाफलक वह समकोर है जिसके आधार भी समानाभुज हों।

अभ्यास ३०

(१) किसी समानाफलक के बारह कोरों को चार-चार समान और समानान्तर कोरों के ३ दलो मे बाट सकते हैं।

(२) किसी समानाफलक के छओं फलक समानाभुज होते हैं। (समकोर की पहली परिभाषा से सिद्ध करो)

(३) किसी समानाफलक के सम्मुख फलक सर्वागंसम होते हैं।

(४) यदि किसी समानाफलक के सम्मुख फलकों को एक समतल से काटे तो एक समानाभुज प्राप्त होगा।

(५) किसी समानाफलक के किन्हीं चार कोरों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समानाभुज बनता है।

(६) किसी समानाफलक के बारह कोरो के वर्गों का योग उस के चारो विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

(७) समानाफलक के विकर्ण बिन्दुगामी होते हैं और एक दूसरे को अधियाते हैं। (इ० बो० १९३४)

मान लो कि (क ख ग घ, के खे गे घे) एक समानाफलक है। क ग, के गे, क गे, ग के को जोड़ो।

अब, चूँकि क के, ग गे समान और ‖ हैं, अस्तु आकृति क के गे ग एक समानाभुज है।

∴ इस के विकर्ण क गे, ग के एक दूसरे को अधियाते हैं।

अस्तु, क गे के मध्य बिन्दु म में से ग के गुजरता है।

इसी प्रकार, ख गे, क घे को जोड़ कर हम सिद्ध कर सकते है

कि खघे भी उसी बिन्दु म मे से गुजरता है और उस पर अधियाता है।

इसी प्रकार, चौथा विकर्ण घखे भी।

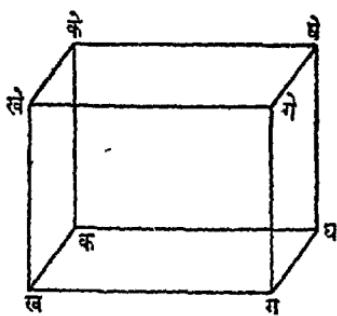
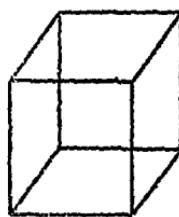
मप, मफ, मब किसी समानाफलक के तीन बिन्दुगामी कोर हैं। सिद्ध करो कि जो विकर्ण म के मध्येन जाता है।

(८) △ पफब के केन्द्रव मे से होकर जाता है

(९) उसको समतल पफब समत्रिभाजित करता है

आयतज

(४) जिस समानाफलक के सब फलक आयत हों, आयतज कहलाता है। जिस आयतज के सब फलक वर्ग हो, घनज कहलाता है।

चित्र २३

चित्र २४

अभ्यास ३१

सिद्ध करो कि किसी आयताकार ठोस में

(१) प्रत्येक कोर जिन दो फलकों से मिलता है उन पर लम्ब होता है।

(२) कोई भी तीन बिन्दुगामी कोर परस्पर लम्ब होते हैं।

(३) प्रत्येक फलक जिन चार फलकों से मिलता है उन पर लम्ब होता है, और छठे के ॥ होता है।

(४) किसी विकर्ण का वर्ग किन्ही तीन बिन्दुगामी कोरों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

सिद्ध करो कि किसी आयतज के विकर्ण बराबर होते हैं।

(५) यदि किसी कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः क, ख, ग हो तो उसकी दीवारों का क्षेत्रफल २ग (क + ख) होगा।

(६) एक आयताकार हौज़ के विस्तार ८,१० और १२ इञ्च हैं। हौज़ में कितनी समाई है ?

(७) एक फौलादी छड़ १२.२ सम लम्बी, ३.५ सम चौड़ी और १.३ सम मोटी है। यदि फौलाद का विशिष्ट घनत्व ७.८ है तो छड़ का भार निकालो।

(८) एक आयताकार ठोस के ३ बिन्दुगामी कोरों की लम्बाइयों का योग ल, और विकर्ण की लम्बाई व, है। ठोस का तल निकालो।

(९) एक आयताकार ठोस के विस्तार ३:४:७ की निष्पति में हैं और उसका पूर्ण तल १०९८ वर्ग गज़ है। उसके तीनों विस्तार निकालो।

(१०) एक आयताकार तालाब ४० फीट लम्बा और ३२ फीट चौड़ा है। यदि उसमें एक नल से पानी भरा जाय जो १ मिनट में ४० गैलन पानी देता है तो तालाब में प्रति घटा कितने इञ्च पानी बढ़ेगा ? (६$\frac{१}{४}$ गैलन = १ घनफ़ुट)

(११) १६″ भुजा वाले एक घनज मे बड़ी से बड़ी रेखा कितनी लम्बी खींच सकते हैं ?

(१२) किसी घनज के दो त्रिकर्णों का मध्यस्थ कोण निकालो।

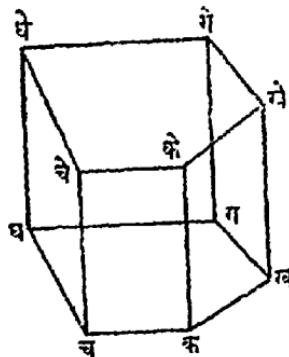
(५) लाम्बिक समकोर का भुजा तल।

चित्र ५५

मान लो कि समकोर के आधार की भुजाओं की लम्बाइयाँ की, खी, गी... हैं, और ऊ समकोर की ऊँचाई है।

तो, स्पष्ट है कि समकोर का भुजातल
=आयत क ख खे के+आयत ख ग गे खे+...

=की ऊ+खी ऊ+गी ऊ+...।

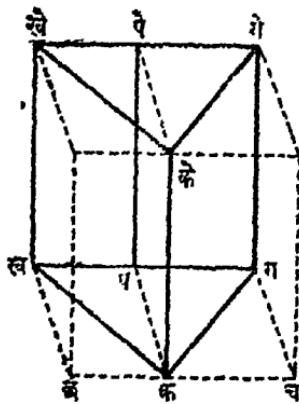
=(की+खी+गी+....) ऊ।

=(आधार की परिमिति)×ऊँचाई।

(६) लाम्बिक समकोर का घनफल।

चित्र ५६

मान लो कि त्रिभुजी आधार क ख ग पर (क ख ग, के खे गे) एक लाम्बिक समकोर है।

क के के मध्येन एक समतल खींचो जो समतल ग गे खे ख पर ⊥ हो और उसे रेखा प पे में काटे।

क के मध्येन ख ग के ‖ च छ खींचकर आयत ख ग च छ को पूरा करो। आधार ख ग च छ और अवलम्ब क के पर एक आयतज बनाओ।

स्पष्ट है कि आधार क ख ग का समकोर

$= \frac{1}{2}$ (आधार ख ग च छ का आयतज)

$= \frac{1}{2}$ (आधार ख ग च छ) × ऊँचाई।

=(आधार क ख ग) × ऊँचाई।

यदि समकोर बहुभुजी हो तो कई तिपहले समकोरों में विभाजित किया जा सकता है जैसा कि चित्र ५७ में दर्शाया गया है। अस्तु,

चित्र ५७

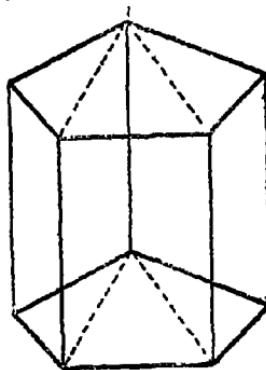
किसी भी लाम्बिक समकोर का घनफल

=(तिपहले आधारों का योग) × ऊँचाई

=(आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई।

उपसाध्य १—तिर्यक समकोर का घनफल

=(आधार का क्षेत्रफल) × अवलम्ब

२—समकोर जिनके आधारों के क्षेत्रफल और अवलम्ब बराबर हो, घनफल मे बराबर होंगे।

अभ्यास ३२

(१) यदि किसी समकोर को आधारों के ‖ एक समतल काटे तो कटान आकृति आधारों से सर्वांगसम होगी।

अस्तु, समकोण का छिन्न, जो आधारों के ‖ किसी समतल से काटा जाय, समकोर होता है।

(२) किसी समकोर के ‖ समतल-काट सर्वांगसम होते हैं।

(३) एक लाम्बिक समकोर का आधार एक चतुर्भुज प फ ब भ है जिसमें प फ=५, फ ब=७, ब भ=८, भ प=१२, ∠ प=६०°। यदि समकोर की ऊँचाई १० है तो उसका पृष्ठतल और घनफल निकालो।

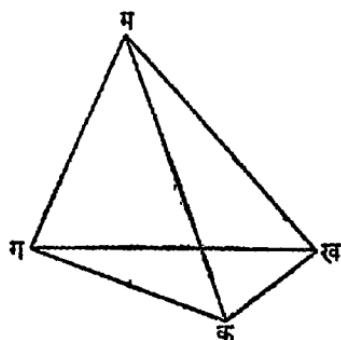
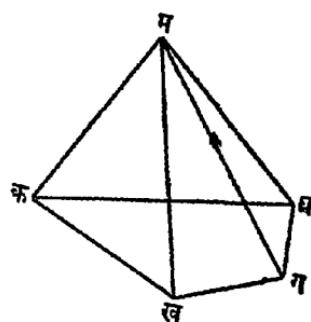
(४) एक समकोर का आधार एक समकोण △ है जिसका कर्ण १७" है। यदि उँचाई १' है और आयताकार फलकों के क्षेत्रफलों का योग ४८० वर्ग इंच, तो आधार की शेष भुजाएँ ज्ञात करो।

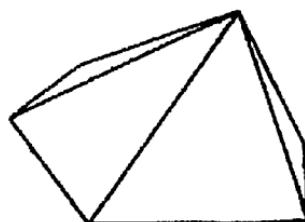
(५) एक बानात के डेरे का फर्श ८' वर्ग है। उसकी चोटी ७' की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा है। अगाड़ी और पिछाड़ी उर्ध्व हैं और शेष दोनों दीवारें ४' की ऊँचाई तक ऊर्ध्व हैं। डेरे में कितनी बानात लगेगी और उसकी समावृत्ति कितनी होगी?

(६) एक दीवार के सहारे रेत का एक ढेर लगा है जो ४' चौड़ी भूमि ढक लेता है। रेत का तल क्षितिज से ३०° का कोण बनाता है। एक घनफुट के निकटतम दशम भाग तक बताओ कि दीवार की १ फुट लम्बाई पर कितना रेत खड़ा है।

(७) एक पैसेंजर, जो ३० मील प्रति घण्टे की चाल से चल रही है, ४० सेकिण्ड में एक सुरंग पार करती है। सुरंग का ऊर्ध्व-काट १०′ ऊँचाई का एक आयत है जिसपर ४′ ऊँचाई का एक समद्वि समकोण △ खड़ा है। सुरंग को बनाने में कितनी मिट्टी निकली होगी?

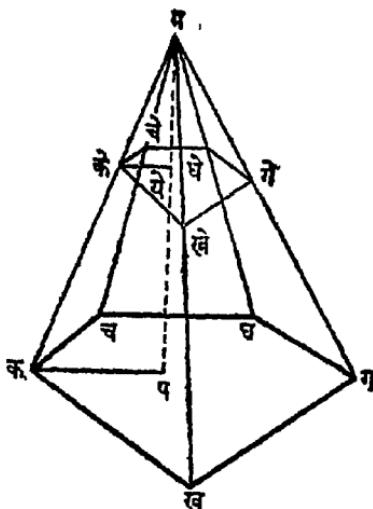
(२) हरम

(७) हरम उस बहुफलक को कहते हैं जिसका एक फलक, जो आधार कहलाता है, कोई ऋजुभुज हो, और शेष सब फलक त्रिभुज हों जिनका सार्व शीर्ष आधार के समतल के बाहर हो।

चित्र ५८ चित्र ५९

उस हरम को लाम्बिक कहेंगे जिसका (क) आधार एक सम भुज हो (सम △, वर्ग या सम बहुभुज) (ख) शीर्ष उस लम्ब पर स्थित हो जो आधार के समतल पर उसके मध्यबिन्दु (अन्तः केन्द्र या परि-केन्द्र) के मध्येन खींचा जाय।

एक हरम क्रमशः तिपहला, चौपहला या बहुपहला कहलाता है यदि उसका आधार त्रिभुज, चतुर्भुज या बहुभज हो।

चित्र ६०

(८) एक हरम का, आधार के समानान्तर, समतल काट आधार के समरूप होता है।

मान लो कि (म, क ख ग घ च) एक हरम है और के खे गे घे चे आधार के ‖ किसी समतल का काट है।

अब, ‖ समतल क ख ग घ च, के खे गे घे चे तीसरे समतल म क ख को क ख, के खे पर काटते हैं।

चित्र ६१

∴ के खे ‖ क ख। (साध्य १३)

इसी प्रकार, खे गे ‖ ख ग, गे घे ‖ ग घ.....

अस्तु, आकृति के खे गे घे चे के सब $\angle$ क्रमशः बराबर हैं आकृति क ख ग घ च के संगत कोणों के।

फिर, समरूप $\triangle$ों म के खे, म क ख और म खे गे, म ख ग में से

$$\frac{\text{के खे}}{\text{क ख}} = \frac{\text{म खे}}{\text{म ख}} = \frac{\text{खे गे}}{\text{ख ग}}$$

अस्तु, $\frac{\text{के खे}}{\text{क ख}} = \frac{\text{खे गे}}{\text{ख ग}} = \frac{\text{गे घे}}{\text{ग घ}} = \cdots$

(९) एक हरम के, आधार के समानान्तर, समतल काट का क्षेत्रफल शीर्ष से अपनी दूरी के वर्ग के अनुपात में घटता बढ़ता है।

म से आधार पर म प $\perp$ डालो जो समतल काट से पे पर मिले।

क प, के पे को जोड़ो।

$\therefore$ आकृतियाँ के खे गे घे चे, क ख ग घ च समरूप हैं ;

$$\therefore \frac{\text{आकृति के खे गे घे चे}}{\text{आकृति क ख ग घ च}} = \frac{\text{के पे}^2}{\text{क प}^2}$$

$$= \frac{\text{म के}^2}{\text{म क}^2} \text{ (समरूप } \triangle \text{ों म के खे, म क ख से)}$$

$$= \frac{\text{म पे}^2}{\text{म प}^2} \text{ (समरूप } \triangle \text{ों म के पे, म क प से)।}$$

उपसाध्य १—यदि किसी हरम के, आधार के समानान्तर, दो समतल काट लिये जायँ तो उसके क्षेत्रफल, उनकी शीर्ष से दूरियों के वर्गों के अनुपात में होंगे।

(२) यदि दो हरमों में जिनके

(क) आधारों के क्षेत्रफल बराबर हों,

(ख) अवलम्ब बराबर हों,

समतल काट लिये जायँ जो

(ग) आधारों के समानान्तर हों और

(घ) शीर्ष से समान दूरियों पर हों,

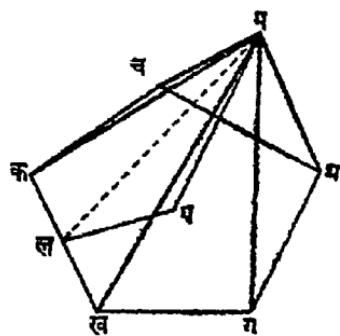
तो उन समतल काटों का क्षेत्रफल बराबर होगा।

(१०) लाम्बिक हरम का तिरछा तल जिसका आधार स भुजाओं का सम बहुभुज है।

चूँकि हरम लाम्बिक है, अस्तु सब कोर म क, म ख...समान हैं। इसलिए म क ख, म ख ग.... सब समान समद्वि $\triangle$ हैं।

समतल क ख ग घ च पर म प $\perp$ डालो, और प से क ख पर प ल $\perp$ डालो।

तो म ल $\perp$ क ख, अस्तु क ख का मध्य बिन्दु ल हुआ।

चित्र ६२

म ल हरम की तिरछी ऊँचाई है।

अब, तिरछा तल = स. △ म क ख।

= स. $\frac{1}{2}$ क ख × म ल।

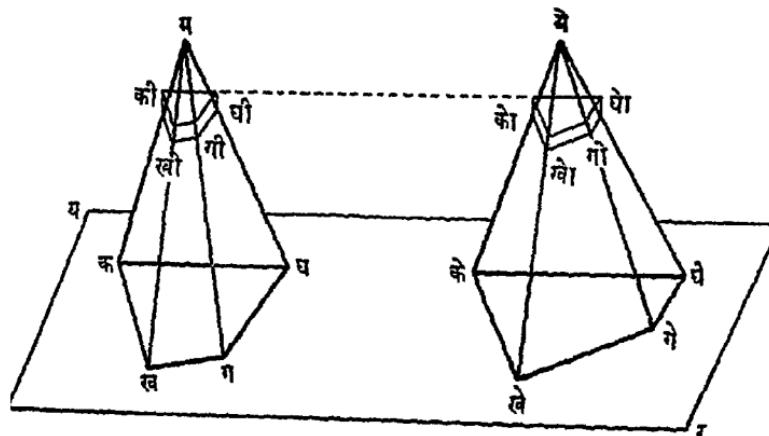
= $\frac{1}{2}$ (आधार की परिमिति) × तिरछी ऊँचाई।

पूर्ण तल = तिरछा तल + आधार का क्षेत्रफल।

(११) दो हरम जिनके

(क) आधारों के क्षेत्रफल बराबर हों, और

(ख) अवलम्ब बराबर हों,

घनफल में बराबर होंगे।

चित्र ६३

मान लो कि (म, क ख ग घ), (मे, के खे गे घे), दो हरम हैं जिनके अवलम्ब और आधारों के क्षेत्रफल समान हैं।

हरमों को एक ही समतल य र पर रक्खो

मान लो कि य र के ‖ एक समतल हरमों को ऋजुभुजों की खी गी घी, को खो गो घो पर काटता है जिनके क्षेत्रफल बराबर होंगे

(§ ९ उपसाध्य २)

इस समतल के ऊपर, बहुत ही पास में, उसी के ॥ एक और समतल लो और दोनों समतलों के बीच में, आधारों की खी गी घी और को खो गो घो पर दो लाम्बिक समकोर बनाओ।

तो इन समकोरों के घनफल समान होंगे (§ ६ उप साध्य २)

अब ॥ समतलों की एक श्रेणी बनाओ और क्रमागत समतलों से प्रत्येक जोड़े के बीच में एक जोड़ा लाम्बिक समकोर बनाओ।

इन में से एक हरम का प्रत्येक समकोर घनफल में दूसरे हरम के सगत समकोर के बराबर होगा।

अब, समतलों की संख्या अनन्ततः बढ़ाओ।

सीमा में, प्रत्येक हरम अपने समकोरों के योग के बराबर होगा।

अस्तु, हरमों के घनफल बराबर हुये।

चित्र में चौपहले हरम ही लिये गये हैं परन्तु तर्क बिल्कुल व्यापक है।

(१२) हरम का घनफल।

(क) पहिले एक तिपहला हरम (म, क ख ग) लो।

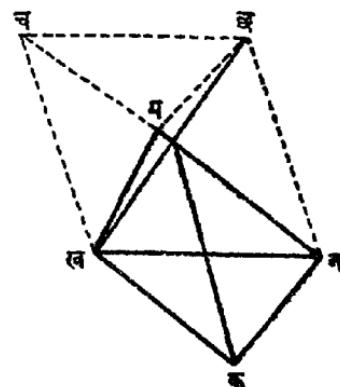
म के मध्येन समतल क ख ग के ॥ समतल म च छ खींचो।

ख च, ग छ खींचो क म के ॥ जो इस समतल से, च, छ पर मिलें।

अब (क ख ग, म च छ) एक समकोर बन गया।

चित्र ६४

ख छ को जोड़ो।

अब, समकोर (क ख ग, म च छ)

=हरम (म, क ख ग) + हरम (म, ग ख च छ)

=हरम (म, क ख ग) + हरम (म, ग ख छ) + हरम (म, ख च छ)

अब, हरम (म, ख च छ) को हरम (ख, म च छ) भी कह सकते हैं।

और हरमों (ख, म च छ), (म, क ख ग) के घनफल बराबर होंगे क्योंकि उनके आधारों के क्षेत्रफल बराबर हैं, और अवलम्ब एक ही है।

इसी कारण से हरमों (म, ख च छ), (म, ख ग छ) के घनफल भी बराबर होंगे।

अस्तु, चूँकि तीनों हरमों के घनफल बराबर हैं,

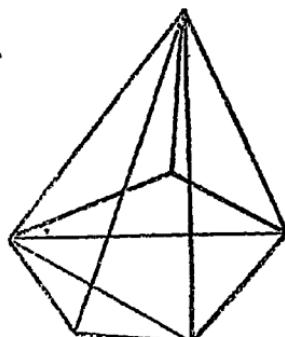
हरम (म, क ख ग) = $\frac{1}{3}$ समकोर (क ख ग, ख च छ)

= $\frac{1}{3}$ (आधार का घनफल) × ऊँचाई।

(ख) यदि हरम का आधार एक बहुभुज हो तो उसके विकर्ण खींच कर हरम को कई तिपहले हरमों में विभाजित कर सकते हैं जैसा चित्र में दर्शाया है।

अस्तु, किसी भी आधार के हरम का घनफल

= $\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई।

चित्र ६९

(१३) एक समकोर का वह भाग जो ऐसे समतल के काटने से बने जो आधार के समानान्तर न हो, **विच्छिन्न समकोर** कहलाता है।

मान लो कि (क ख ग, के खे गे) एक विच्छिन्न लाम्बिक त्रिपहला समकोर है जिसकी ऊँचाइयाँ की, खी, गी हैं। समतल क ख गे खींचो। तो इस ठोस का घनफल

चित्र ६६

= हरम (गे, क ख ग) + हरम (गे, क ख खे के।

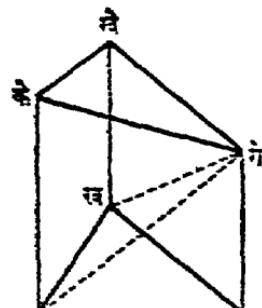
अब, हरम (गे, क ख ग) = $\frac{1}{3}$ गी $\times$ △ क ख ग,

और हरम (गे, क ख खे के)

= $\frac{1}{3}$ (समलम्बुज क ख खे के) $\times$ (गे से समतल क ख खे के पर डाला गया ⊥)

= $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ (की + खी) $\times$ क ख $\times$ (ग से क ख पर डाला गया ⊥)

= $\frac{1}{3}$ (की + खी) $\times$ △ क ख ग।

अस्तु, ठोस का घनफल = $\frac{1}{3}$ (की + खी + गी) $\times$ △ क ख ग।

अभ्यास ३३

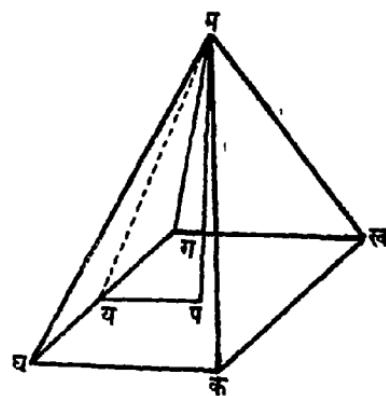
(१) एक लाम्बिक हरम का आधार ६ सम की भुजा का वर्ग है और शेष फलक सम △ हैं। घनफल निकालो।

आधार और एक भुजाफलक का मध्यस्थ द्वितल ∠ भी ज्ञात करो।

मान लो कि हरम के आधार क ख ग घ पर म प ⊥ है।

ग घ पर प थ ⊥ डालो। म थ को जोड़ो जो कि ग घ पर ⊥ होगा।

अब, △ म ग घ सम △ है जिसकी भुजा ६ सम है।

∴ मध्यिका म थ = ३√३ सम।

और प थ = ३ सम।

चित्र ६७

∴ म प² = (३√३)² — ३² = १८ वर्ग सम।

अस्तु, म प = ३√२ सम

∴ हरम का घनफल = ⅓ (वर्ग क ख ग घ) × म प।

= ⅓. ३६. ३√२ घन सम = ३६√२ घन सम।

और कोज प थ म = $\frac{\text{प थ}}{\text{म थ}} = \frac{३}{३\sqrt{३}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$ ।

अस्तु, द्वितल ∠ = कोज$^{-१}$ $\frac{१}{\sqrt{३}}$ ।

(२) निकटतम घन इञ्च तक एक लाम्बिक हरम का घनफल बताओ जिसका आधार १०′ की भुजा का एक सम

षट्भुज है और किसी भुजा के मध्य बिन्दु से शीर्ष तक तिर्छी ऊँचाई १०′ है।

(३) एक लाम्बिक हरम का आधार १० सम की भुजा पर एक सम △ है और अवलम्ब ५ सम है।

ज्ञात करो (क) तिर्छी ऊँचाई (ख) एक भुजा फलक का क्षेत्र-फल (ग) एक भुजाफलक और आधार के मध्यस्थ द्वितल कोण की कोज्या।

(४) एक लाम्बिक हरम में से, जिसकी ऊँचाई १२″ और आधार ६″ की भुजा का वर्ग है, बड़े से बड़ा घनज इस प्रकार काटा गया है कि उसका एक फलक हरम के आधार के समतल में स्थित है। घनज के कोर की लम्बाई ज्ञात करो। (बनारस १९३९)

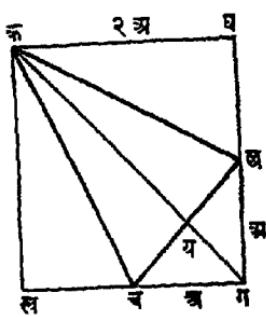
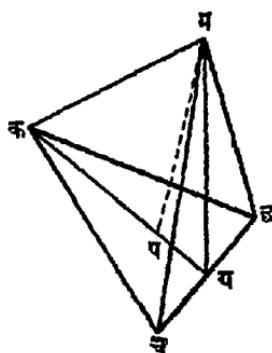
(५) एक लाम्बिक हरम में से, जिसकी ऊँचाई ऊ इञ्च और आधार अ इञ्च की भुजा का वर्ग है, बड़े से बड़ा घनज इस प्रकार काटा गया है कि उसका एक फलक हरम के आधार के समतल में स्थित है। सिद्ध करो कि घनज का

कोर $\frac{\text{अ ऊ}}{\text{अ} + \text{ऊ}}$ है।

(६) क ख ग घ एक वर्ग आकृति का काग़ज़ है, ख ग और ग घ के मध्य बिन्दु च, छ हैं, और काग़ज़ को रेखाओं क च, च छ, छ क पर मोड़ कर एक हरम बनाया गया है।

सिद्ध करो कि फलकों के क्षेत्रफल १ : २ : २ : ३ के अनुपात में हैं और हरम का घनफल उस घनज के घनफल का $\frac{1}{24}$ है जिसका एक फलक न्यस्त वर्ग हो।

चित्र ६८

चित्र ६९

मान लो कि इच्छित हरम (म, क च छ) है, अस्तु, ख, ग, घ की नई स्थिति म है।

यदि वर्ग की भुजा २ अ है,

तो क ग = २ अ $\sqrt{२}$; क य = क ग − य ग =

$$२अ\sqrt{२} - \frac{अ}{\sqrt{२}} = \frac{३ अ}{\sqrt{२}};$$

$$म छ = घ छ = अ ; म च = ख च = अ ; य छ = \frac{अ}{\sqrt{२}};$$

$$म य = ग य = \frac{अ}{\sqrt{२}}$$

समतल क च छ पर म प ⊥ डालो। स्पष्ट है कि प रेखा क य पर पड़ेगा।

मान लो कि प य = ई।

अब, $म य^{२} - प य^{२} = म प^{२} = म क^{२} - क प^{२}$,

अस्तु, $\frac{अ^{२}}{२} - ई^{२} = \left(२ अ\right)^{२} - \left(\frac{३ अ}{\sqrt{२}} - ई\right)^{२}$

अर्थात्, $\frac{अ^2}{२} = ४अ^2 - \frac{९ अ^2}{२} + ३अ ई\sqrt{२}$

अर्थात्, $३ अ ई\sqrt{२} = \frac{अ^2}{२} - ४अ^2 + \frac{६ अ^2}{२} = अ^2$

अस्तु, $ई = \frac{अ}{३\sqrt{२}}$ ।

अब, $\triangle$ म च छ $= \triangle$ ग च छ $= \frac{अ^2}{२}$ ।

$\triangle$ म क छ = घ क छ $= अ^2$ ।

इसी प्रकार, $\triangle$ म क च $= अ^2$ ।

$\triangle$ क च छ = य छ क य $= \frac{अ}{\sqrt{२}} \cdot \frac{३अ}{\sqrt{२}} = \frac{३अ^2}{२}$ ।

$\therefore \triangle$ म च छ : $\triangle$ म क छ : $\triangle$ म क च : $\triangle$ क च छ

$= \frac{1}{2}अ^2 : अ^2 : अ^2 : \frac{3}{2} अ^2$

$= १ : २ : २ : ३$

और म प^2 = म य^2 − प य^2 $= \left(\frac{अ}{\sqrt{२}}\right)^2 - \left(\frac{अ}{३\sqrt{२}}\right)^2$

$= \frac{1}{2}अ^2 - \frac{1}{18} अ^2 = \frac{4}{9} अ^2$,

अस्तु म प $= \frac{2}{3}$ अ ।

$\therefore$ हरम (म, क च छ) का घनफल $= \frac{1}{3} \triangle$ क च छ म प

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} अ^2 \cdot \frac{2}{3} अ \quad = \frac{1}{3} अ^3$

$= \frac{1}{24} (२ अ)^3$

$= \frac{1}{24}$ (घनज जिसका आधार वर्ग क ख ग घ हो)

(७) यदि एक लाम्बिक तिपहला समकोर दो समतलों से काटा जाय तो समतलों के बीच के कटे हुये भाग का घनफल बराबर होगा लाम्बिक काट और तीनों भुजा कोरों के योग के तिहाई के गुणनफल के ।

चतुष्फलक

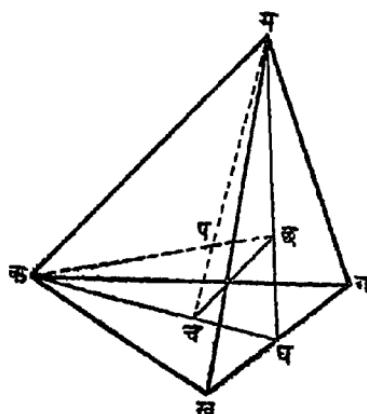
(१४) तिपहले हरम को **चतुष्फलक** को कहते हैं। अस्तु चतुष्फलक उस बहुफलक को कहते हैं जो चार समतल फलकों से घिरा हुआ हो।

जिस चतुष्फलक के सब कोर बराबर हों, **सम चतुष्फलक** कहलाता है।

(१५) जो चार रेखाये एक चतुष्फलक के शीर्षों को सम्मुख फलकों के केन्द्रवों से मिलाती हैं, बिन्दुगामी होती हैं और कटान बिन्दु उनको ३ : १ के अनुपात मे विभाजित करता है।

मान लो कि (म, क ख ग) एक चतुष्फलक है, और च, छ, ज, झ क्रमशः फलकों क ख ग, ख म ग, ग म क, क म ख के केन्द्रव हैं।

तो सिद्ध करना है कि म च, क छ, ख ज, ग झ बिन्दु-गामी हैं।

मान लो कि ख ग का मध्य बिन्दु घ है।

चित्र ७०

म च, क छ, क घ, म घ, च छ को मिलाओ।

स्पष्ट है कि च छ, क्रमशः क घ, म घ पर स्थित होंगे।

अब, ∵ क च : च घ = २ : १ = म छ : छ घ।

∴ च छ ‖ क म।

अस्तु, च म, छ क इन ‖ रेखाओ के समतल में स्थित होंगी, और इस लिये किसी बिन्दु प पर मिलेंगी।

अब, म प : प च = म क : छ च (समरूप △ों म क प, च प छ से)

= म घ : छ घ (" म क घ, छ च घ से)

= ३ : १

अस्तु, म च, क च को एक ऐसे बिन्दु प पर काटती है जो म च को ३ : १ से अनुपात में विभाजित करता है।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि ख ज, ग झ भी म च को इसी बिन्दु प पर काटती हैं।

अस्तु, चारों रेखायें म च, क छ, ख ज, ग झ बिन्दुगामी हैं

और क प : प छ = म प : प च = ३ : १

अस्तु, प्रत्येक ३ : १ के अनुपात में विभाजित होती हैं।

(१६) जो तीन रेखायें एक चतुष्फलक के सम्मुख कोरों के मध्य बिन्दुओं को मिलाती हैं, बिन्दुगामी होती हैं और एक दूसरे को अधियाती है।

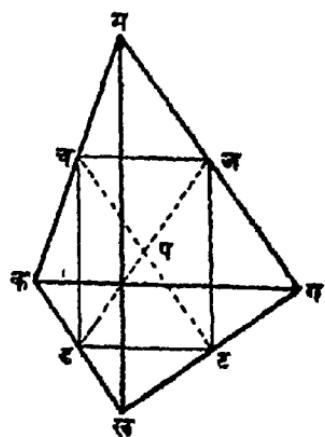
मान लो कि (म, क ख ग) एक चतुष्फलक है और च, छ, ज, ट, ठ, ड क्रमशः म क, म ख, म ग, और ख ग, ग क, क ख के मध्य बिन्दु हैं।

च ड, ड ट, ट ज, ज च, च ट, ज ड को जोड़ो।

अब, आकृति ड ट ज च एक समानान्तर भुज है।

अस्तु, इसके विकर्ण च ट, ज ड एक दूसरे को अधियाते हैं।

चित्र ७१

अर्थात् ज ड, च ट के मध्य बिन्दु प में से जाती है, और स्वयम् भी प पर अधियाती है।

इसी प्रकार छ ठ भी।

(१७) जिस चतुष्फलक के सम्मुख कोर बराबर हों, उसके

(क) चारों भुजा फलक सर्वांगसम होंगे।

(ख) किसी शीर्ष के फलक कोणों का योग १८०° होगा।

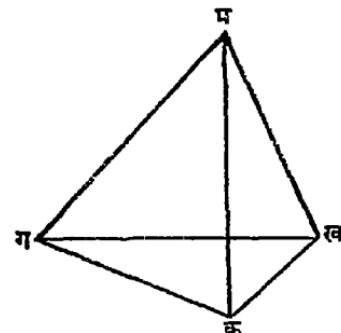
मान लो कि (म, क ख ग) एक चतुष्फलक है जिसके सम्मुख कोर बराबर हैं।

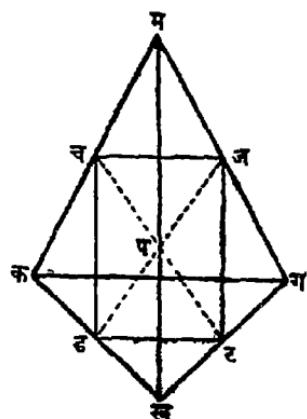
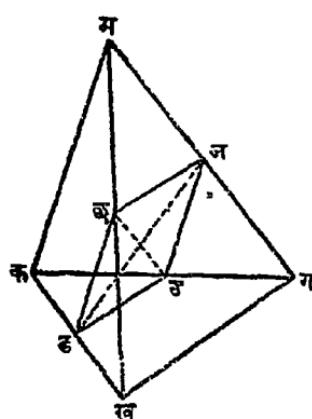
△ों म क ख, ख क ग में, म क युगल है, म ग = क ख, म ख = क ग।

अस्तु, △ सर्वांगसम हैं।

∴ ∠ क म ख = ∠ म क ग।

इसी प्रकार, ∠ ख म ग = ∠ म ग क।

∴ ∠ क म ख + ख म ग + ग मक = ∠ म क ग + म ग क + क म ग = १८०°

चित्र ७२

(१८) यदि एक चतुष्फलक के दो कोर क्रमशः अपने सम्मुख कोरों पर ⊥ हों तो तीसरे जोड़े के कोर भी परस्पर ⊥ होंगे।

चित्र ७३

चित्र ७४

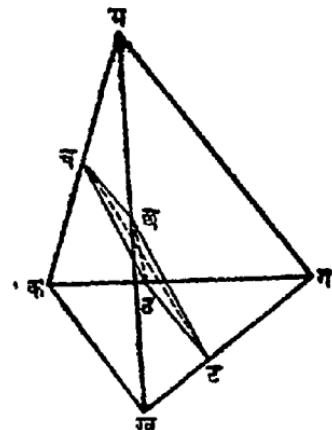
मान लो कि (म, क ख ग) एक चतुष्फलक है जिसमें म ख ⊥ क ग, म क ⊥ ख ग।

तो सिद्ध करना है कि म ग ⊥ क ख।

चित्र ७५

मान लो कि म क, म ख, म ग और ख ग, ग क, क ख के मध्य बिन्दु क्रमशः च, छ, ज और ट, ठ, ड हैं।

तो ट ड च ज एक समानाभुज है।

परन्तु, च ज ‖ क ग, च ड ‖ म ख और म ख ⊥ क ग।

∴ च ज ⊥ च ड (साध्य १८)

अर्थात्, आकृति ट ड च ज एक आयत है, अस्तु, इस के विकर्ण च ट, ड ज बराबर हैं।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि आकृति ठ ड छ ज एक आयत है, अस्तु इसके विकर्ण छ ठ, ड ज भी बराबर हैं।

∴ ट च = ड ज = छ ठ।

अब, समानाभुज ट ठ च छ में विकर्ण च ट, छ ठ बराबर हैं।

∴ आकृति ट ठ च छ एक आयत हो गई, अस्तु च छ ⊥ च ठ।

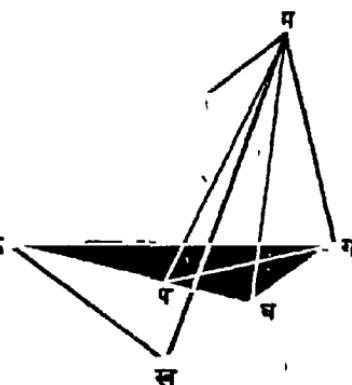
परन्तु, क ख ‖ च छ और म ग ‖ च ठ।

∴ म ग ⊥ क ख।

(१९) सम चतुष्फलक का तल और घनफल ।

मान लो कि (म, क ख ग) एक समचतुष्फलक है, और म प आधार क ख ग पर ⊥ है।

△ों म प क, म प ग में, प पर के कोण सम ∠ हैं, कर्ण म क, म ग बराबर हैं, और भुजा म प युगल है।

∴ △ सर्वांगसम हैं, अस्तु प क = प ग ।

चित्र ७६

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि प ख = प क = प ग ।

अस्तु प △ क ख ग का परिकेन्द्र हुआ ।

मान लो कि चतुष्फलक का प्रत्येक कोर २ अ है ।

मान लो कि ख ग का मध्य बिन्दु घ है ।

क घ, म घ को जोड़ो ।

अब, सम △ क ख ग की माध्यिका $\text{क घ} = \text{अ}\sqrt{3}$ ।

और सम △ म ख ग की माध्यिका $\text{म घ} = \text{अ}\sqrt{3}$ ।

अस्तु $\text{प घ} = \dfrac{\text{अ}}{\sqrt{3}}$ ।

$$\therefore\ \text{म प}^2 = \text{म घ}^2 - \text{प घ}^2 = 3\text{अ}^2 - \frac{\text{अ}^2}{3} = \frac{8\text{अ}^2}{3}$$

अर्थात् $$\text{म प} = \frac{2\text{अ}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

(क) चतुष्फलक का तल $=$ ४ △ म ख ग

$$= \frac{४ (२ अ)^{२} \sqrt{३}}{४} = ४ अ^{२} \sqrt{३} ।$$

(ख) चतुष्फलक का घनफल $= \frac{1}{3}$ △ क ख ग $\times$ म प

$$= \frac{\frac{1}{3}(२अ)^{२}\sqrt{३}}{४} \times \frac{२अ\sqrt{२}}{\sqrt{३}} = \frac{२अ^{3}\sqrt{२}}{३}$$

(२०) एक सम चतुष्फलक के दो सम्मुख कोरों के बीच की न्यूनतम दूरी, एक कोर पर खिचे वर्ग के विकर्ण की आधी होगी।

चित्र ७७

मान लो कि (म, क ख ग) एक सम चतुष्फलक है जिसका कोर २ अ है।

मान लो कि ख ग, क म के मध्य विन्दु च, छ हैं।

च क, च छ, च म को जोड़ो।

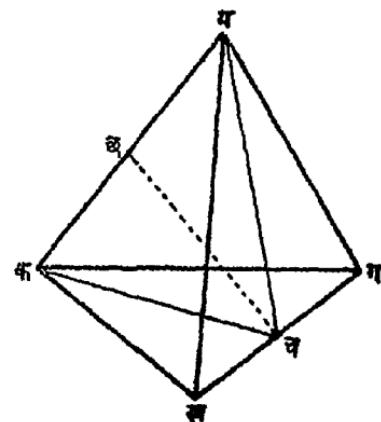
तो ख ग, क म के बीच की न्यूनतम दूरी च छ होगी।

हम § १९ में सिद्ध कर चुके हैं कि च म $=$ च क $=$ अ$\sqrt{३}$ ।

और च, ख ग का मध्य विन्दु है जो सम △ म ख ग का आधार है।

∴ म च ⊥ ख ग।

इसी प्रकार, क च ⊥ ख ग।

∴ समतल च म क ⊥ ख ग। (साध्य ४)

अस्तु च छ भी, जो समतल च म क में स्थित है, ख ग पर ⊥ है।

अब, समद्वि △ च क म के आधार का मध्य बिन्दु छ है।

∴ च छ ⊥ क म।

अस्तु च छ, जो कि ख ग, क म दोनों पर ⊥ है, इनके बीच की न्यूनतम दूरी हुई।

और च छ^२=च म^२ − छ म^२=(अ√३)^२ − अ^२=२अ^२,

अर्थात् च छ=अ√२=$\frac{१}{२}$ (२अ√२)

=$\frac{१}{२}$ (कोर पर खिंचे वर्ग का विकर्ण)।

अभ्यास ३४

(१) यदि किसी चतुष्फलक को एक ऐसा समतल काटे जो दो सम्मुख कोरों के ‖ हो तो कटान आकृति एक समानाभुज होगी।

(२) एक समचतुष्फलक और एक लाम्बिक त्रिभुजीय हरम में क्या भेद है ?

(३) एक लाम्बिक त्रिभुजीय हरम में जो तीन कोर शीर्ष पर मिलते हैं, बराबर होते हैं।

(४) विलोमतः, यदि एक चतुष्फलक का आधार एक सम △ है और तीनों शीर्षगामी कोर बराबर हैं तो चतुष्फलक लाम्बिक होगा।

दूसरे शब्दों मे, ऐसे चतुष्फलक में शीर्ष से आधार पर डाले गये लम्ब का पाद-बिन्दु आधार का परिकेन्द्र होगा।

(५) प्रश्न (४) के चतुष्फलक में सम्मुख कोर ⊥ होते हैं।

(६) प्रश्न (४) के चतुष्फलक में सम्मुख कोरों के वर्गों का योग अचल होता है।

(७) किसी चतुष्फलक के कोरों के वर्गों का योग, सम्मुख कोरों के मध्य बिन्दुओं की संयोजक रेखाओं के वर्गों के योग का चौगुना होता है।

(८) एक चतुष्फलक का आधार एक सम △ है जिसकी भुजा ४" है और शेष फलक समद्वि △ हैं जिनकी समान भुजाये ५" की हैं तो

(क) आधार और एक भुजा फलक,

(ख) दो भुजा फलकों

के मध्यस्थ कोण का मान बताओ।

(९) एक लाम्बिक त्रिभुजीय हरम और एक समचतुष्फलक एक आधार पर खड़े हैं और पहिले की ऊँचाई दूसरे की ऊँचाई की आधी है। आधार और एक तिरछे तल के द्वितल कोण का मान निकालो। (बनारस १९४२)

(१०) म क, म ख, म ग एक घनज के तीन बिन्दुगामी कोर हैं जिनमें से प्रत्येक का मान अ है। सिद्ध करो कि

(क) हरम (म, क ख ग) का घनफल $= \frac{१}{६}$ अ^3

(ख) म से समतल क ख ग पर डाला गया लम्ब $= \frac{१}{\sqrt{३}}$ अ (इलाहाबाद १९३५)

(क) हरम (म, क ख ग)

=हरम (ग, म क ख)

$= \frac{1}{3}$ △ म क ख × म ग

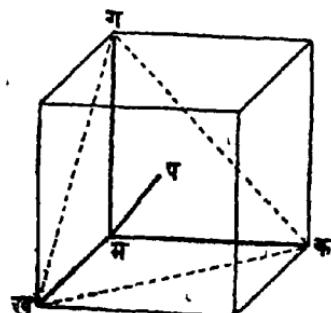
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ अ^२. अ $= \frac{1}{६}$ अ^3।

(ख) △ क ख ग सम △ है जिसकी भुजा अ√२ है।

चित्र ७८

∴ △ क ख ग =

$$\frac{(अ\sqrt{२})^२\sqrt{३}}{४} = \frac{अ^२\sqrt{३}}{२}।$$

मान लो कि समतल क ख ग पर म प ⊥ है जिसकी लम्बाई पी है।

तो, हरम (म, क ख ग) $= \frac{1}{3}$ △ क ख ग × म प

अर्थात्, $\frac{1}{6}$ अ$^3 = \frac{1}{3} \frac{\text{अ}^2 \sqrt{3}}{2}$ पी।

∴ पी $= \frac{\text{अ}}{\sqrt{3}}$।

(११) म क, म ख, म ग एक घनज के बिन्दुगामी कोर हैं। प्रत्येक का मान ४′ है। चतुष्फलक (म, क ख ग) का तल निकालो।

(१२) किसी घनज का एक शीर्ष म है और प, फ, ब उन कोरों के मध्य बिन्दु हैं जो म पर मिलते हैं। यदि (म, क ख ग) और शेष सब शीर्षों पर के संगत चतुष्फलक निकाल दिये जायँ तो लब्ध ठोस में कितने शीर्ष, कोर और फलक होंगे? इस ठोस के घनफल की घनज के घनफल से क्या निष्पत्ति होगी?

(१३) म क, म ख, म ग तीन सरल रेखायें परस्पर ⊥ हैं जिनके मान क्रमशः की, खी, गी हैं। सिद्ध करो कि

(क) हरम (म, क ख ग) का घनफल $= \frac{1}{6}$ की खी गी।

(ख) △ क ख ग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \sqrt{\text{खी}^2 \text{गी}^2 + \text{गी}^2 \text{की}^2 + \text{की}^2 \text{खी}^2}$।

(ग) म से समतल क ख ग पर डाला गया लम्ब

$=$ की खी गी। $\sqrt{\text{खी}^2 \text{गी}^2 + \text{गी}^2 \text{की}^2 + \text{की}^2 \text{खी}^6}$

(इलाहाबाद १९३९)

हरम का छिन्न

(२१) हरम का छिन्न हरम के उस भाग को कहते हैं जो आधार और किसी ऐसे समतल के बीच स्थित हो और जो आधार के समानान्तर हो।

मान लो कि एक हरम (म, क ख ग घ) का छिन्न (क ख ग घ, की खी गी घी) है।

§ ८ से स्पष्ट है कि आकृतियाँ की खी गी घी, क ख ग घ समरूप हैं।

और यदि म पी प समतलों की खी गी घी, क ख ग घ पर ⊥ है तो

चित्र ७१

$$\frac{\text{आकृति की खी गी घी}}{\text{आकृति क ख ग घ}} = \frac{\text{म पी}^2}{\text{म प}^2}।$$

(२२) एक लाम्बिक हरम के छिन्न का तिरछा तल जिसका सम आधार स भुजाओं का है।

तिरछा तल स बराबर समलम्भुजों से बना है।

मान लो कि समलम्भुज क ख खी की की ॥ भुजाओं के बीच की लाम्बिक दूरी ल है। यह लम्बाई जो सब समलम्भुजों के लिये एक सी होगी, छिन्न की तिरछी ऊँचाई कहलाती है।

अब, तिरछा तल = स × (समलम्भुज क ख खी की का क्षेत्रफल)

$=$ स $\times \frac{1}{2}$(की खी + क ख) $\times$ ल ।

$= \frac{1}{2}$(स. की खी + स. क ख) $\times$ ल ।

$= \frac{1}{2}$(सिरों के घेरों का योग) $\times$ तिरछी ऊँचाई ।

(२३) एक तात्त्विक हरम के छिन्न का घनफल जिसका सम आधार स भुजाओं का है।

मान लो कि छिन्न की ऊँचाई पी प = ऊ ।

मान लो कि म प = $ऊ_1$, म पी = $ऊ_2$, अस्तु $ऊ_1 - ऊ_2 =$ ऊ

मान लो कि आकृतियों क ख ग घ और की खी गी घी के क्षेत्रफल क्रमशः $क्षे_1$ और $क्षे_2$ हैं।

तो $\frac{क्षे_1}{ऊ_1^2} = \frac{क्षे_2}{ऊ_2^2} =$ र (मान लो)।

अस्तु, $क्षे_1 = र\,ऊ_1^2$, $क्षे_2 = र\,ऊ_2^2$ ।

$\therefore$ छिन्न का घनफल = हरम (म, क ख ग घ) − हरम (म, की खी गी घी)

$= \frac{1}{3} क्षे_1\, ऊ_1 - \frac{1}{3} क्षे_2\, ऊ_2$

$= \frac{1}{3} र\, ऊ_1^3 - \frac{1}{3} र\, ऊ_2^3$

$= \frac{1}{3} र\, (ऊ_1 - ऊ_2)\, (ऊ_1^2 + ऊ_1 ऊ_2 + ऊ_2^2)$

$= \frac{1}{3} ऊ\, (र\, ऊ_1^2 + र\, ऊ_1 ऊ_2 + र\, ऊ_2^2)$

$= \frac{1}{3} ऊ\, (क्षे_1 + \sqrt{क्षे_1\, क्षे_2} + क्षे_2)$ ।

अभ्यास ३५

एक लाम्बिक हरम के छिन्न का तिरछा तल निकालो जिसकी तिरछी उँचाई २′ है और जिसके आधार निम्नलिखित हैं :—

(१) ४′ और ६′ की भुजावाले सम △ ।

(२) ३′ और ६′ की भुजा वाले वर्ग ।

(३) १′ और ३′ की भुजा वाले सम षट्भुज ।

(४) एक हरम के छिन्न के आधार △ हैं जिनमें से एक की भुजायें १३, १२ और ५ सम हैं, और दूसरे की ६·५,६ और २·५ सम । यदि छिन्न की मोटाई ८ सम है तो उसका घनफल निकालो ।

(५) एक खाई के मुँह और तली आयताकार हैं । मुँह के विस्तार ४००′ और १८′ हैं और तली के ३५०′ और १५′ । यदि खाई की गहराई १२′ है तो उसके खोदने में कितने टन मिट्टी निकली होगी ? (१००० घन फिट=४२ टन)

(६) एक बाल्टी एक छिन्न हरम के आकार की है जिसके सिरे ८″ और १२″ की भुजाओं के वर्ग हैं । बाल्टी की गहराई ४″ है और उसमें ३″ पानी खड़ा है । तो बताओं कि पात्र में कितना पानी है ।

(३) बहुफलकों पर व्यापक प्रमेय

(२४) औयलर का प्रमेय—यदि किसी बहुफलक में फलकों, कोरों और शीर्षों की संख्या क्रमशः फ, को और शी है तो

$$को + २ = फ + शी ।$$

मान लो कि बहुफलक एक पर एक करके स फलकों को जोड़ने से बना है।

प्रथम, यदि हम एक ही फलक लें तो शीर्षों और कोरों की संख्या बराबर होगी, अर्थात्

$$को = शी \qquad (१)$$

जब हम दूसरा फलक जोड़ेंगे तो दोनों फलकों में दो शीर्ष और एक कोर युगल होंगे अर्थात् हम शीर्षों से एक अधिक कोर जोड़ रहे हैं। अस्तु, जब हम ने दो फलक जोड़ दिये तो

$$को = शी + १ । \qquad (२)$$

जब हम तीसरा फलक जोड़ेंगे तो नये फलक और पहिले दोनों फलकों में तीन शीर्ष और दो कोर युगल होंगे। अस्तु, जब हमने तीन फलक मिला दिये तो

$$को = शी + २ । \qquad (३)$$

इसी प्रकार, हम प्रत्येक पग पर शीर्षों से एक अधिक कोर जोड़ेंगे। अस्तु, जब हम ने (स—१) फलक जोड़ दिये तो

$$को = शी + स - २ \qquad (४)$$

जब हम अन्तिम फलक जोड़ेंगे तो नये फलक के समस्त कोर और समस्त शीर्ष पहिले (स – १)फलकों में समाविष्ट होंगे।

अस्तु, न हम कोई नया कोर जोड़ रहे हैं न शीर्ष। इस लिये स फलको के लिये वही समीकरण रहेगी जो (स—१) फलकों के लिये है, अर्थात्

को + २ = शी + स।

दूसरे शब्दों में, को + २ = शी + फ।

(२५) सम बहुफलक केवल पाँच ही प्रकार के हो सकते हैं।

साध्य ३१ में हम ने सिद्ध किया है कि किसी भी ठोस कोण के फलक कोणों का योग ३६०° से कम ही होगा।

अब, किसी बहुफलक के प्रत्येक शीर्ष पर कम से कम तीन समतल मिलेंगे क्योंकि तीन से कम समतलों से ठोस कोण नहीं बन सकता।

कम से कम रेखाओं वाला सम-ऋजुभुज सम-त्रिभुज होता है।

अस्तु, एक शीर्ष पर तीन सम △ मिल सकते हैं। इस स्थिति में प्रत्येक शीर्ष के फलक कोणों का योग = ३ × ६० = १८०° (< ३६०°)।

यह भी सम्भव है कि चार सम △ प्रत्येक शीर्ष पर मिले जिस स्थिति में एक शीर्ष के फलक कोणों का योग

= ४ × ६० = २४०° (< ३६०°)।

इसी प्रकार, यदि प्रत्येक शीर्ष पर ५ सम △ मिलें तो प्रत्येक शीर्ष के फलक कोणों का योग

= ५ × ६० = ३००° (< ३६०°)

चूँकि ६ × ६० = ३६०, अस्तु यह असम्भव है कि ६ या ६ से अधिक सम △ एक विन्दु पर मिले।

चार भुजाओं का सम-ऋजुभुज वर्ग होता है। एक शीर्ष पर ३ वर्ग मिल सकते हैं जिस स्थिति में प्रत्येक शीर्ष के फलक कोणों का योग

= ३ × ९० = २७०° (< ३६०°)।

चार या चार से अधिक वर्ग एक बिन्दु पर नहीं मिल सकते क्योंकि ४×९०=३६० और योग ३६० से कम होना चाहिये।

५ भुजाओं वाली सम आकृति सम-पञ्चभुज होती है जिसका प्रत्येक कोण=१०८°। यदि ३ सम-पञ्चभुज एक बिन्दु पर मिलें तो फलक कोणों का योग

=३×१०८=३२४ (< ३६०)।

चूँकि ४×१०८=४३२ > ३६०, अस्तु तीन से अधिक सम-पञ्च-भुज एक शीर्ष पर नहीं मिल सकते।

सम-षट्भुज का प्रत्येक कोण=१२०°। अस्तु, ३ सम-षट्भुज एक बिन्दु पर नहीं मिल सकते क्योंकि ३×१२०=३६०।

और किसी अन्य सम ऋजुभुज का कोण > १२०।

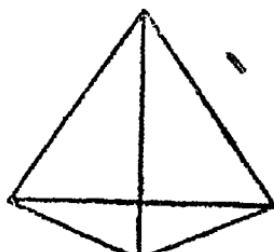
अस्तु, सम बहुफलक पाँच ही प्रकार के हो सकते हैं जो निम्न-लिखित हैं :—

(क) एक **सम चतुष्फलक** जिसमें प्रत्येक शीर्ष पर तीन सम △ मिलते हैं=

६ कोर

४ फलक

४ शीर्ष

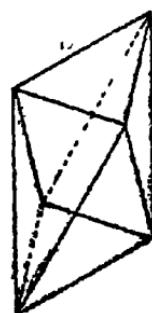
६+२=४+४

चित्र ८०

(ख) एक **सम अष्टफलक** जिसमें प्रत्येक शीर्ष पर ४ सम △ मिलते हैं।

१२ कोर

८ फलक

६ शीर्ष,

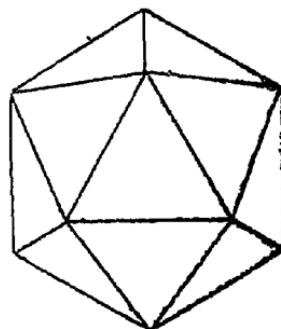
१२+२=८+६

चित्र ८१

(ग) एक सम विंशतिफलक जिसमे प्रत्येक शीर्ष पर ५ सम △ मिलते हैं।

३० कोर

२० फलक

१२ शीर्ष

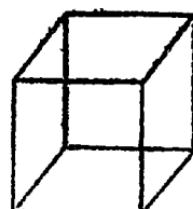
३०+२=२०+१२

चित्र ८२

(घ) एक घनज जिसमें प्रत्येक शीर्ष पर ३ वर्ग मिलते हैं।

१२ कोर

६ फलक

८ शीर्ष

१२+२=६+८

चित्र ८३

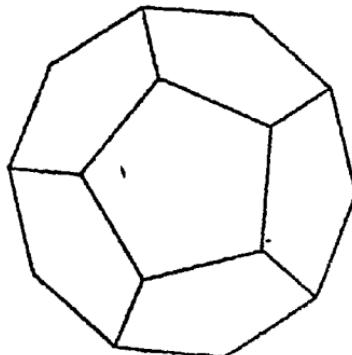
(च) एक सम द्वादशफलक जिसमें प्रत्येक शीर्ष पर ३ सम पञ्च-भुज मिलते हैं।

चित्र ८४

३० कोर

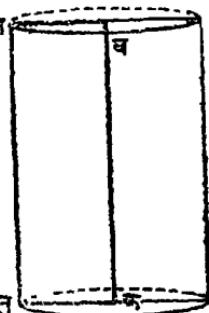
१२ फलक

२० शीर्ष

३०+२=१२+२०

परिक्रम ठोस

(४) बेलन

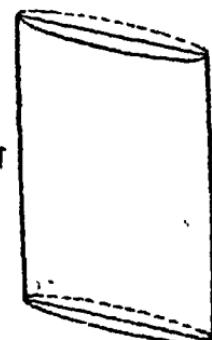
(२६) यदि एक आयत अपनी एक भुजा के चारों ओर घूमे तो जो ठोस वह बनायेगा, उसे लाम्बिक वर्तुल बेलन कहते हैं।

मान लो कि आयत क ख ग घ भुजा क घ को अक्ष मान कर उसके चारों ओर घूमता है। रेखा ख ग जो परिक्रमण करती है बेलन की जनक रेखा कहलाती है। क घ को बेलन की ऊँचाई कहते हैं।

चित्र ८५

बेलन की परिभाषा इस प्रकार भी दी जाती है :—

एक समतल में एक वृत्त दिया है। एक सरल रेखा अपने ॥ इस प्रकार चलती है कि सदैव वृत्त को काटती है और समतल पर ⊥ रहती है। तो वह एक बेलन बनायेगी। उस वृत्त को बेलन का प्रदर्शक कहते हैं।

यदि रेखा समतल पर ⊥ न हो तो बेलन को तिर्यक वर्तुल बेलन कहेंगे।

हम केवल लाम्बिक वर्तुल बेलनों का ही अध्ययन करेंगे।

चित्र ८६

(२७) मान लो कि एक लाम्बिक समकोर का सम आधार स भुजाओं का है। जब भुजाओं की सख्या अनन्ततः बढ़ जाय तो बहुभुज एक वृत्त हो जायगा और समकोर एक बेलन हो जायगा। अस्तु, एक बेलन के तल और घनफल के सूत्र एक लाम्बिक समकोर के सूत्रों से ही निकाले जा सकते हैं।

चित्र ८७

अतएव, यदि एक बेलन की ऊँचाई ऊ हो और वर्तुल आधार की त्रिज्या त्रि हो तो

बेलन का तल

= (आधार की परिधि) × ऊँचाई

= २ π त्रि . ऊ।

बेलन का पूर्ण तल

= वक्र तल + आधारों का क्षेत्रफल

= २ π त्रि ऊ + २ π त्रि^{2}

= २ π त्रि (ऊ + त्रि)।

बेलन का घनफल

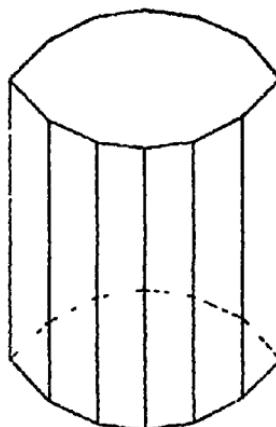
= (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई

= π त्रि^{2} ऊ।

उपसाध्य—तिर्यक बेलन का घनफल

= (आधार का क्षेत्रफल) × लाम्बिक ऊँचाई।

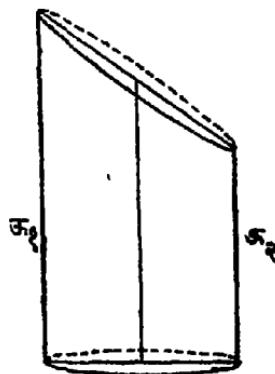
(२८) एक बेलन का वह भाग जो किसी ऐसे समतल से कटा हो जो आधार के ∥ न हो, विच्छिन्न बेलन कहलाता है।

चित्र ८८

यदि विच्छिन्न बेलन की ऊँचाइयाँ ऊ₁ और ऊ₂ हों तो,

विच्छिन्न बेलन का वक्र तल

$$= २ \pi \text{ त्रि} \cdot \frac{\text{ऊ}_१ + \text{ऊ}_२}{२} ।$$

विच्छिन्न बेलन का घनफल

$$= \pi \text{ त्रि}.^२ \frac{\text{ऊ}_१ + \text{ऊ}_२}{२} ।$$

अभ्यास ३६

(१) किसी बेलन का, आधार के ||, कोई समतल काट एक वृत्त होगा।

(२) किसी बेलन का कोई लाम्बिक छिन्न एक बेलन ही होगा।

(३) किसी बेलन का, अक्ष के ||, कोई समतल काट एक आयत होगा।

(४) उन बिन्दुओं की निधि ज्ञात करो जो एक परिमित सरल रेखा से निर्दिष्ट दूरी पर रहते हैं।

(५) एक बेलन का वक्रतल, पूर्णतल और घनफल ज्ञात करो जिसकी ऊँचाई ७" और आधार का व्यास ४" हो

(६) एक बेलन का वक्रतल १००० वर्गसम और उसके आधार का व्यास २० सम है। बेलन का घनफल निकालो, और निकटतम मिलीमीटर तक उसकी ऊँचाई भी ज्ञात करो।

(७) ४ मिलीमिटर व्यास का एक तावे का तार एक बेलन के तल पर लपेटा गया है, जिसकी लम्बाई २४ सम और व्यास २० सम है। तार की लम्बाई और तौल बताओ, जब कि ताबे का विशिष्ट घनत्व ८.८८ है।

(८) एक आयताकार कागज़ का तख्ता, २२" लम्बा, १२" चौड़ा, दो प्रकार मोड़ने से दो विभिन्न लाम्बिक वर्तुल बेलनों का वक्र तल बनाता है। दोनों बेलनों के घनफल का अन्तर निकालो।

(९) एक खोखला बेलन बनाया गया है जिसका बाह्य व्यास १', बाह्य लम्बाई २' और धातु की मोटाई $\frac{3}{4}$" है। यदि बेलन

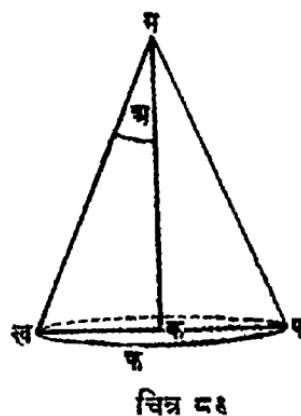
का एक मुँह बन्द है तो उसे बनाने के लिए कितनी धातु की आवश्यकता होगी?

(१०) एक बेलनीय छल्ले का तल और घनफल निकालो, जिसकी मोटाई ६" और आन्तरिक व्यास ३२" है।

(५) शंकु

(२९) यदि एक सम ∠ △ अपनी एक भुजा को अक्ष मान कर उसके चारों ओर घूमे तो जो ठोस वह बनायेगा उसे लाम्बिक वर्तुल शंकु कहते हैं।

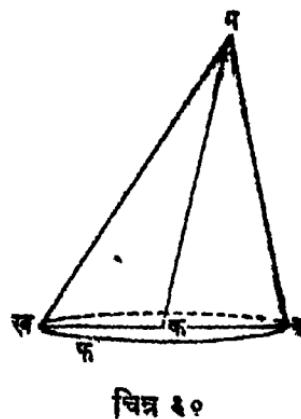
मान लो कि सम ∠ △ म क ख भुजा क म को अक्ष मान कर उसके चारों ओर घूमता है। रेखा म ख जो घूमती है, शकु की जनक रेखा कहलाती है। म क को शकु की ऊँचाई और म ख को तिरछी ऊंचाई कहते हैं। बिन्दु म को शंकु का शीर्ष और ∠ प म ख (△ म क ख के ∠ म का दुगुना) को शीर्ष कोण कहते हैं।

चित्र ८६

मान लो कि प फ ख एक ⊙ है। उसके केन्द्र क के मध्येन म क खींचो ⊙ के समतल पर लम्ब। एक सरल रेखा जो इस प्रकार चले कि सदैव म में से होकर जाय और ⊙ को काटे, एक शकु बनायेगी।

यदि हम शंकु की यह परिभाषा दें तो वृत्त को शंकु का प्रदर्शक कहेंगे।

यदि म क वृत्त के समतल पर ⊥ न हो तो शंकु को तिर्यक वर्तुल शंकु कहेंगे।

हम केवल लाम्बिक वर्तुल, शंकुओं का ही अध्ययन करेंगे।

चित्र ९०

(१०) मान लो कि एक लाम्बिक हरम का सम आधार स भुजाओं का है। यदि भुजाओं की संख्या अनन्ततः बढ़ाई जाय तो बहुभुज एक वृत्त बन जायगा और हरम एक शंकु बन जायगा। अस्तु, एक शंकु के वक्रतल और घनफल के सूत्र एक लाम्बिक हरम के सूत्रों से निकाले जा सकते हैं।

चित्र ३१

यदि एक शंकु की ऊँचाई ऊ है, तिरछी ऊँचाई ल है और वर्तुल आधार की त्रिज्या त्रि है तो

शंकु का वक्रतल

$=\frac{1}{2}$ (आधार की परिधि) $\times$ तिरछी ऊँचाई

$=\frac{1}{2}$ (२ π त्रि.) $\times$ ल $=\pi$ त्रि ल

शंकु का पूर्ण तल

= वक्र तल + आधार का क्षेत्रफल

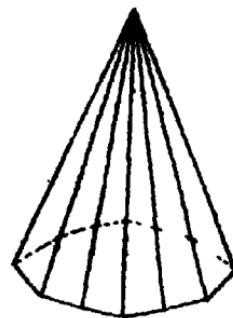
$=\pi$ त्रि ल $+\pi$ त्रि$^{2}=\pi$ त्रि (ल + त्रि)।

शंकु का घनफल

$=\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ ऊँचाई

$=\frac{1}{3}\pi$ त्रि^{2} ऊ

उपसाध्य—तिर्यक शंकु का घनफल

$=\frac{1}{3}$ (आधार का घनफल) $\times$ लाम्बिक ऊँचाई

अभ्यास ३७

(१) किसी वर्तुल शकु के समानान्तर समतल काट वृत्त होते हैं जिनके क्षेत्रफल शंकु के शीर्ष से उनकी दूरियों के वर्गों के अनुपात में होते हैं। (इलाहाबाद १९३४)

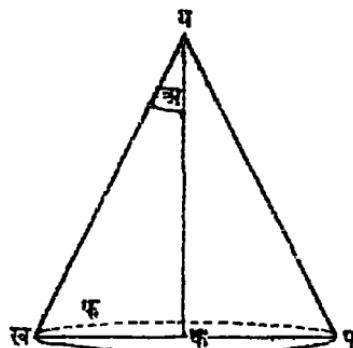
(२) एक लाम्बिक वर्तुल शंकु का एक समतल काट, जो शीर्ष में से गुजरता है, एक समद्वि △ होगा

(३) समान शीर्ष कोणो के शंकुओं के घनफल उनके अवलम्बों के घनों की निष्पत्ति मे होते हैं। (बनारस १९३५)

चित्र से स्पष्ट है कि

$$\frac{\text{त्रि}_1}{\text{ल}_1} = \text{ज्या अ} ; \frac{\text{ऊ}_1}{\text{ल}_1} = \text{कोज अ} ।$$

$$\frac{\text{त्रि}_1}{\text{ऊ}_1} = \text{स्पज्या अ} ।$$

और इसी प्रकार के सूत्र दूसरे शकु के लिये। अस्तु,

चित्र ९२

$$\frac{\text{घनफल}_1}{\text{घनफल}_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi\ \text{त्रि}_1^2\ \text{ऊ}_1}{\frac{1}{3}\pi\ \text{त्रि}_2^2\ \text{ऊ}_2} = \frac{\text{ऊ}_1^3\ \text{स्पज्या अ}}{\text{ऊ}_2^3\ \text{स्पज्या अ}} = \frac{\text{ऊ}_1^3}{\text{ऊ}_2^3} ।$$

दर्शाओ कि इन शकुओं के घनफल इनके आधारों की त्रिज्याओ अथवा तिरछी ऊँचाइयों की भी घनित निष्पत्ति में होंगे।

(४) एक सम ∠ △ अपने कर्ण की परिक्रमा करता है। जो ठोस बनेगा उसका तल और घनफल निकालो।

(अलीगढ़ १९३५)

(५) एक सम △ के एक शीर्ष से सम्मुख भुजा के ‖ एक रेखा खींची गई है। यदि △ इस रेखा की परिक्रमा करे तो इस प्रकार जो ठोस बनेगा उसका घनफल निकालो।

(इलाहाबाद १६३३)

(६) किसी वर्ग के एक शीर्ष से एक रेखा खीची गई है उस विकर्ण के ‖ जो उस शीर्ष मे से नही गुजरता। यदि वर्ग इस रेखा की परिक्रमा करे तो इस प्रकार जो ठोस बनेगा उसका घनफल निकालो। (इलाहाबाद १९३४)

(७) ९′ ऊँचा एक शंक्वाकार डेरा ऐसा बनाना है कि ६′ ऊँचा मनुष्य उसके केन्द्र से २′ त्रिज्या के अन्दर कहीं भी खड़ा हो सके। डेरे के लिये कितने वर्ग गज बानात चाहिये?

(बनारस १९३४, १९३६)

चित्र ९३

आधार के केन्द्र क से २′ की त्रिज्या लेकर एक ⊙ खीचो।

तो ६′ का मनुष्य इस ⊙ के अन्दर कहीं भी खड़ा हो सकेगा।

अस्तु, इस ⊙ की परिधि के किसी भी बिन्दु पर शंकु की ऊँचाई ६′ होगी।

चित्र से स्पष्ट है कि

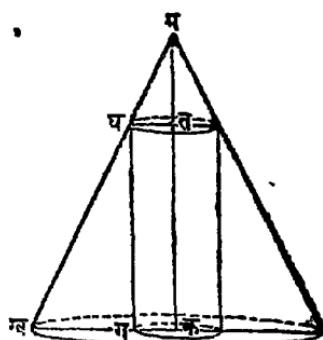
$$\frac{\text{खग}}{\text{गघ}}=\frac{\text{घत}}{\text{तम}},$$

अर्थात् $\frac{\text{खग}}{६}=\frac{२}{३}$

$\therefore$ खग$=४'$।

अब, क ख $=$ ६', म क $=$ ९'।

$\therefore$ म ख $=$ ३$\sqrt{}$१३'।

$\therefore$ शंकु का तिरछा तल $=\pi$.६ ३$\sqrt{}$१३ वर्ग फिट

$=$ २ π $\sqrt{}$३१ वर्ग गज़।

(८) एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल ७७० वर्ग इञ्च और वक्र-तल ८१४ वर्ग इञ्च है। घनफल निकालो।

(९) एक शंकु ठीक इतना बड़ा है कि ६" की भुजा का एक सम चतुष्फलक उसमें समा सके। शंकु का घनफल बताओ। (इलाहाबाद १९३४)

(१०) एक डेरे का लाम्बिक वर्तुल शंक्काकार ऊपरी भाग लाम्बिक वर्तुल बेलनाकार निचले भाग पर इस प्रकार रक्खा हुआ है कि शंकु का आधार और बेलन का समतल सिरा एकांगी हैं। आधार का क्षेत्रफल १०० वर्ग फ़िट, बेलनाकार भाग की ऊँचाई ३' और डेरे का पूर्ण आन्तर घनफल ५०० घन फ़िट है।

डेरे की भूमि से ऊँचाई बताओ और दर्शाओ कि उसके बनाने में लगभग २५५ वर्ग फ़िट बानात लगेगी।

शंकु का छिन्न

(३१) एक शंकु का वह भाग जिसे आधार के समानान्तर कोई समतल काटे, शंकु का छिन्न कहलाता है।

मान लो कि शंकु (म, क ख) का एक छिन्न (क ख, खी की) है। मान लो कि $त्रि_1$ और $त्रि_2$ सिरों की त्रिज्यायें हैं, ऊ छिन्न की ऊँचाई है, और ल उसकी तिरछी ऊँचाई है।

मान लो कि म ख $= ल_1$, म खी $= ल_2$, अस्तु, $ल_1 - ल_2 = ल$।

चित्र १४

(३२) छिन्न का वक्र तल।

समरूप △ों म ख ग, म खी गी में से

$$\frac{ग\ ख}{ख\ म} = \frac{गी\ खी}{खी\ म}, \quad अर्थात् \ \frac{त्रि_1}{ल_1} = \frac{त्रि_2}{ल_2}।$$

अब, छिन्न का वक्र तल

= शंकु (म, क ख) का वक्र तल − शंकु (म, की खी) का वक्र तल।

$$= \pi (त्रि_1 ल_1 - त्रि_2 ल_2)$$

$$= \pi \left(त्रि_1 ल_1 - \frac{त्रि_2^2}{त्रि_1} ल_1 \right) = \pi \frac{ल_1}{त्रि_1} \left(त्रि_1^2 - त्रि_2^2 \right)$$

$$= \pi (त्रि_1 + त्रि_2) \frac{ल_1}{त्रि_1} (त्रि_1 - त्रि_2)$$

$$= \pi \; (त्रि_1 + त्रि_2) \left(ल_1 - \frac{त्रि_2}{त्रि_1} ल_1 \right)$$

$$= \pi \; (त्रि_1 + त्रि_2)(ल_1 - ल_2)$$

$$= \pi \; (त्रि_1 + त्रि_2) ल ।$$

मान लो कि प फ ब छिन्न का मध्य काट है।

तो मध्य काट की त्रिज्या $= \frac{1}{2} (त्रि_1 + त्रि_2)$

अस्तु, वक्र तल को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$२ \pi \frac{त्रि_1 + त्रि_2}{२} \times ल$$

$$= (\text{मध्य काट की परिधि}) \times \text{तिरछी ऊँचाई}$$

(३२) छिन्न का घनफल

मान लो कि $म\,ग = ऊ_1$, $म\,गी = ऊ_2$,

अस्तु, $ऊ_1 - ऊ_2 = ऊ$ ।

समरूप △ों म ख ग, म खी गी से स्पष्ट है कि

$$\frac{त्रि_1}{ऊ_1} = \frac{त्रि_2}{ऊ_2}, \quad \text{अस्तु} \quad ऊ_2 = \frac{त्रि_2}{त्रि_1} ऊ_1 ।$$

छिन्न का घनफल = शंकु (म, क ख) − शंकु (म, की खी)

$$= \frac{1}{3} \pi \; त्रि_1^2 ऊ_1 - \frac{1}{3} \pi \; त्रि_2^2 ऊ_2$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(त्रि_1^2 ऊ_1 - त्रि_2^2 \cdot \frac{त्रि_2}{त्रि_1} ऊ_1 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \frac{ऊ_1}{त्रि_1} (त्रि_1^3 - त्रि_2^3)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \frac{ऊ_1}{त्रि_1} (त्रि_1 - त्रि_2)(त्रि_1^2 + त्रि_1 त्रि_2 + त्रि_2^2)$$

$$= \frac{१}{३} \pi \left(ऊ_१ - \frac{त्रि_२}{त्रि_१} ऊ_१\right) (त्रि_१^२ + त्रि_१ त्रि_२ + त्रि_२^२)$$

$$= \frac{१}{३} \pi (ऊ_१ - ऊ_२) (त्रि_१^२ + त्रि_१ त्रि_२ + त्रि_२^२)$$

$$= \frac{१}{३} \pi ऊ (त्रि_१^२ + त्रि_१ त्रि_२ + त्रि_२^२)$$

घनफल को इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं :—

$$= \frac{१}{६} \pi ऊ (२ त्रि_१^२ + २ त्रि_१ त्रि_२ + २ त्रि_२^२)$$

$$= \frac{१}{६} \pi ऊ [त्रि_१^२ + (त्रि_१ + त्रि_२)^२ + त्रि_२^२]$$

$$= \frac{१}{६} ऊ \left[\pi त्रि_१^२ + ४ \pi \left(\frac{त्रि_१ + त्रि_२}{२}\right)^२ + \pi त्रि_२^२\right]$$

$$= \frac{१}{६} ऊ (क्षे_१ + ४ म + क्षे_२),$$

जब कि $क्षे_१$ और $क्षे_२$ सिरों के क्षेत्रफल हैं और म मध्य काट का।

अभ्यास २८

(१) एक मस्तूल का व्यास तली पर ३०″ और चोटी पर १५″ है। यदि मस्तूल में १३२½ घन फीट लकड़ी है तो फुटों में उसकी ऊँचाई बताओ।

मान लो कि मस्तूल की ऊँचाई ऊ फिट है।

$$\text{अब, घनफल} = \frac{१}{३}\,\pi\,\text{ऊ}\left\{१५^२ + १५.\frac{१५}{२} + \left(\frac{१५}{२}\right)^२\right\} \times \frac{१}{१२\times१२\times१२}\ \text{घन फिट}$$

$$\therefore \frac{२६५}{२} = \frac{१}{३}\times\frac{२२}{७}\times\text{ऊ}\times\frac{७}{४}\times२२५\times\frac{१}{१२\times१२\times१२}$$

$$\text{अतः, ऊ} = \frac{२६५}{२}\times\frac{३\times७}{२२}\times\frac{४}{७}\times\frac{१२\times१२\times१२}{२२५}\ \text{फिट}$$

$$= ४८\ \text{फिट}।$$

(२) यदि किसी शंकु के छिन्न के सिरों की त्रिज्यायें $\text{त्रि}_१$ और $\text{त्रि}_२$ हैं और ऊँचाई ऊ है तो दर्शाओ कि उसका घनफल एक बेलन और एक शंकु के घनफलों के योग के बराबर होगा जिनकी ऊँचाई ऊ है और जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः $\frac{१}{२}(\text{त्रि}_१ + \text{त्रि}_२)$ और $\frac{१}{२}(\text{त्रि}_१ - \text{त्रि}_२)$ हैं।

(इलाहाबाद १९३९, अलीगढ़ १९३७)

(३) यदि किसी शंकु के छिन्न की ऊँचाई आधारों की त्रिज्याओं के मध्यमान अनुपाती की दुगुनी हो तो तिरछी ऊँचाई त्रिज्याओं का योग होगी। (इलाहाबाद १९३७)

(४) एक लाम्बिक वर्तल शंकु को दो समतल काटते हैं जो

आधार के ‖ हैं और ऊँचाई को सम त्रिभाजित करते हैं। शंकु के तीनों भागों के घनफलों की तुलना करो।

(इलाहाबाद १९३८)

(५) एक शंकु को, जिसकी ऊँचाई स सम है, एक समतल काटता है जो आधार के ‖ और उस से १ सम दूर है। इस प्रकार बने छिन्न के घनफल को शंकु के घनफल की भिन्न के रूप में लिखो। (इलाहाबाद १९३५)

$$\frac{\text{छिन्न क की खी ख}}{\text{शंकु (म, क ख)}}$$

$$=\frac{\text{शंकु (म, क ख)} - \text{शंकु (म, की खी)}}{\text{शंकु (म, क ख)}}$$

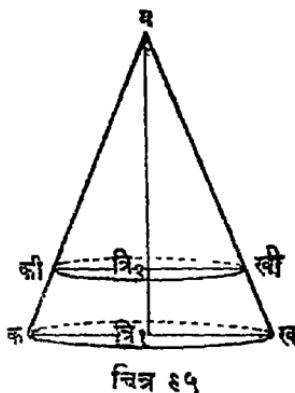
$$=\frac{\frac{1}{3}\pi\,\text{त्रि}_1^2\,\text{स} - \frac{1}{3}\pi\,\text{त्रि}_2^2(\text{स}-१)}{\frac{1}{3}\,\text{त्रि}_1^2\,\text{स}}$$

$$=१-\frac{\text{स}-१}{\text{स}}\cdot\frac{\text{त्रि}_2^2}{\text{त्रि}_1^2}\text{ ।}$$

चित्र ६५

परन्तु, $\frac{\text{त्रि}_2}{\text{त्रि}_1}=\frac{\text{स}-१}{\text{स}}$

$$\therefore \text{ अभीष्ट निष्पत्ति} = १-\frac{\text{स}-१}{\text{स}}\cdot\frac{(\text{स}-१)^2}{\text{स}^2}$$

$$=\frac{\text{स}^3-(\text{स}-१)^3}{\text{स}^3}\text{ ।}$$

(६) एक शंकु को आधार के ‖ एक समतल से काटकर ऊपर का भाग निकाल दिया गया है। यदि शेष भाग का वक्र-

तल शंकु के वक्रतल का $\frac{५}{९}$ हो तो बताओ कि समतल शकु की उँचाई को किस निष्पत्ति मे बाटता है।

(बनारस १९३६)

(७) यदि पिछले प्रश्न मे शेष भाग का घनफल शकु के घनफल का $\frac{७}{८}$ हो तो सगत निष्पत्ति निकालो। (बनारस १९४०)

(८) एक शंकु के छिन्न की ऊँचाई १२' और घनफल ११४४ घन फिट है। आधार की त्रिज्याये निकालो, यदि उनका योग ११' है। (अलीगढ़ १९३०)

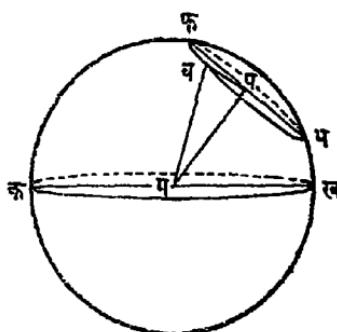
(९) एक बाल्टी शङ्कीय छिन्न के आकार की है। उसकी ऊँचाई ९" और मुँह और तली के व्यास क्रमशः १०" और ७$\frac{१}{२}$" हैं। एक ५' व्यास के कुएँ में से यदि २४ बाल्टी पानी खींचा जाय तो उसका पानी कितना नीचे खिसक जायगा ?

(१०) एक बाल्टी शंकीय छिन्न के आकार की है। उसकी ऊँचाई १' और मुँह और तली की त्रिज्याये क्रमशः १' और $\frac{१}{२}$' हैं। एक १२' व्यास के बेलनाकार हौज मे से, जिसमें १०' पानी खड़ा है, यदि ६० बाल्टी पानी खींचा जाय तो शेष पानी की गहराई कितनी होगी ?

(बनारस १९४३)

(६) गोला

(३४) यदि एक अर्धवृत्त अपने व्यास को अक्ष मानकर उसके चारों ओर घूमे तो जो ठोस वह बनायेगा, उसे **गोला** कहते हैं।

मान लो कि अर्धवृत्त क फ ख अपने व्यास क ख के चारों ओर घूमता है। यदि अर्धवृत्त का केन्द्र म है तो अर्धवृत्त की सब स्थितियों में बिन्दु फ की म से दूरी सदैव एक सी रहेगी। अस्तु, हम गोले की परिभाषा इस प्रकार भी कर सकते हैं कि वह अवकाश में उन समस्त बिन्दुओं की निधि है जो एक अचल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं।

चित्र ६६

म को गोले का **केन्द्र** और म फ को **त्रिज्या** कहते हैं। एक केन्द्रीय सरल खा जो दोनों ओर गोले के तल से सीमित हो, व्यास कहलाती है। स्पष्ट है कि एक व्यास त्रिज्या का दुगुना होता है, अस्तु सब व्यास समान होते हैं।

यह भी प्रत्यक्ष है कि कोई व्यास गोले के किसी बिन्दु पर एक सम ∠ छेकेगा।

(३५) गोले का कोई भी समतल काट वृत्त होता है।

मान लो कि फ व भ गोले का एक समतल काट है और व उसकी परिधि पर कोई बिन्दु है।

समतल क ख ग पर म प ⊥ डालो, और ख प, ख म को जोड़ो।

मान लो कि गोले की त्रिज्या त्रि है।

तो सम ∠ ∆ प म ख में, ख प $= \sqrt{\text{त्रि}^2 - \text{प म}^2}$ ।

अस्तु, यदि इस कटान आकृति क ख ग पर कोई अन्य बिन्दु लें तो उसकी भी प से इतनी ही दूरी होगी। अतः यह आकृति एक वृत्त है जिसका केन्द्र प और त्रिज्या प ख है।

(३६) एक गोले के किसी भी केन्द्रीय समतल काट को बृहत वृत्त कहते हैं। अन्य किसी समतल काट को लघु वृत्त कहते हैं।

गोले पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं में से असंख्य लघु वृत्त खिंच सकते हैं परन्तु, बृहत वृत्त केवल एक ही खिंच सकता है। क्योंकि उन दोनों बिन्दुओं और गोले के केन्द्र में से केवल एक ही समतल खींचा जा सकता है।

यदि गोले पर तीन बिन्दु दिये हों तो उन में से केवल एक ही वृत्त खिंच सकता है जो बृहत हो अथवा लघु।

अभ्यास ३६

(१) किसी गोले के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को अधियाता है। इसका विलोम भी सिद्ध करो।

(२) किसी गोले में सबसे बड़ी जीवा उसका व्यास होती है।

(३) किसी गोले में समान जीवायें केन्द्र से समदूरस्थ होती हैं। इसका विलोम भी सिद्ध करो।

(४) किसी गोले की दो जीवाओं में से वह सी बड़ी होगी जो केन्द्र से निकटतर हो। इसका विलोम भी सिद्ध करो।

(५) किसी गोले के ‖ काटों की केन्द्रनिधि लाम्बिक व्यास होती है।

(६) एक दिए हुए बिन्दु से एक दी हुई सरल रेखा के मध्येन गुजरने वाले समतलों पर लम्ब डाले गये हैं। उनके पाद-बिन्दुओं की निधि ज्ञात करो।

(७) एक दिए हुए बिन्दु से उन सरल रेखाओं पर लम्ब डाले गए हैं जो एक निर्दिष्ट समतल पर खींची गई हैं, और समतल के एक निर्दिष्ट बिन्दु के मध्येन जाती हैं। लम्बों के पाद-बिन्दुओं की निधि ज्ञात करो।

(८) एक बिन्दु से एक समतल तक एक अचल लम्बाई की सरल रेखाएँ खींची गई हैं। उनके सिरों की निधि ज्ञात करो।

(३७) अवकाश में किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्येन असंख्य गोले खिंच सकते हैं। उनके केन्द्र उस समतल पर स्थित होंगे जो उस रेखा को लम्बतः अधियाता है जो उन दोनों बिन्दुओं को जोड़ती है। [देखो अभ्यास ६ प्रश्न ६ (१)]

(३८) अवकाश में किन्हीं तीन विषम रैखिक बिन्दुओं के मध्येन असंख्य गोले खींचे जा सकते हैं।

यदि बिन्दु क, ख, ग हों तो उनके केन्द्र उस सरल रेखा पर स्थित होंगे जो △ क ख ग के परिकेन्द्र में से उसके समतल पर लम्बतः खींचा जाय।

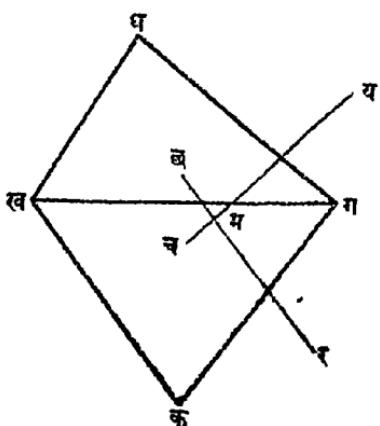
यदि बिन्दु समरैखिक हों तो उनमें से कोई गोला नहीं खिंच सकता। [देखो अभ्यास ६ प्रश्न ६ (२)]

(३९) किन्हीं चार विषमतलस्थ बिन्दुओं में से एक, और केवल एक, ही गोला खींचा जा सकता है।

[देखो अभ्यास ६ प्रश्न ६ (३)]

मान लो कि क, ख, ग, घ चार विषमतलस्थ बिन्दु हैं।

मान लो कि △ों क ख ग, ख ग घ के परिकेन्द्र च, छ हैं। च, छ में से च य, छ र ⊥ डालो क्रमशः समतलों क ख ग, ख ग घ पर।

चित्र ३७

अब, च य का कोई बिन्दु क, ख, ग से समदूरस्थ है।

और छ र का कोई बिन्दु घ, ख, ग से समदूरस्थ है।

अस्तु, च य अथवा छ र का कोई बिन्दु ख, ग से समदूरस्थ है।

परन्तु, उन समस्त बिन्दुओं की निधि जो ख, ग से समदूरस्थ हैं, वह समतल है जो ख ग को लम्बतः अधियाता है।

अस्तु, च य और छ र उसी समतल पर स्थित हैं।

अब, च य और छ र समतलस्थ हैं इस लिये या तो परस्पर काटेंगी या ‖ होंगी।

और चूँकि यह छेदक समतलो एर ⊥ हैं, अस्तु ‖ नहीं हो सकतीं।

अतः, च य और छ र किसी बिन्दु भ पर मिलेंगी।

इसलिये चारों बिन्दुओं क, ख, ग, घ से समदूरस्थ केवल एक ही बिन्दु भ है।

अतएव, यदि भ को केन्द्र मानकर भ क त्रिज्या लेकर एक गोला खींचे तो वह चारों बिन्दुओं में से होकर जायगा।

यदि चारों बिन्दु समतलस्थ हों तो साधारणतया उन में से कोई गोला नहीं खींचा जा सकता। परन्तु यदि चारों बिन्दु समतलस्थ और समवृत्तीय हों तो उनमें से असख्य गोले खींचे जा सकते हैं। उनके केन्द्र उस सरल रेखा पर स्थित होंगे जो चतुर्भुज क ख ग घ के परि-केन्द्र में से समतल क ख ग घ पर लम्बतः खींचा जाय।

अभ्यास ४०

(१) दो गोलों की त्रिज्यायें दी हैं और उनके केन्द्रों की मध्यस्थ दूरी। ज्ञात करो कि किस दशा मे गोले (अ) काटेंगे (ब) स्पर्श करेंगे (स) बिलकुल नही मिलेंगे।

(२) दो गोलों का युगल काट एक वृत्त होता है।

(३) अवकाश में उन बिन्दुओं की निधि ज्ञात करो जो दो निर्दिष्ट बिन्दुओं से न्यस्त दूरी पर स्थित हों।

(४) एक ⊙ दिया हुआ है और एक बिन्दु जो वृत्त के समतल के बाहर स्थित है। एक ऐसा गोला खींचो, जो वृत्त की परिधि और न्यस्त बिन्दु के मध्येन जाय।

(५) एक सम चतुष्फलक के, जिसका कोर २की है, परिगत और अन्तर्गत गोलों की त्रिज्यायें त्रि और त्र हैं। दर्शाओ कि

त्रि = ३ त्र = $\frac{१}{२}\sqrt{६}$ की।

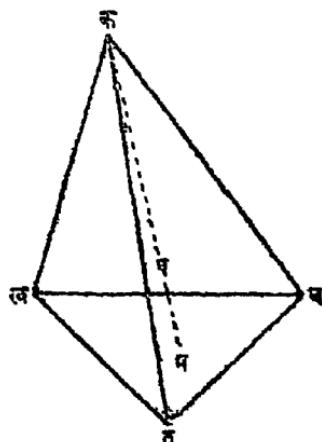
(इलाहाबाद १९४०)

मान लो कि (क, ख ग घ) सम चतुष्फलक है और स फलक ख ग घ का परिकेन्द्र है। चतुष्फलक का परिकेन्द्र क स पर पड़ेगा।

इसी प्रकार परिकेन्द्र उस रेखा पर भी पड़ेगा जो ख को △ क ग घ के परिकेन्द्र (अर्थात् केन्द्रव चूँकि △ सम है) से मिलाती है। अस्तु, परिकेन्द्र इन दोनों रेखाओं का कटान बिन्दु होगा, अर्थात् वह बिन्दु प जो क स को ३ : १ के अनुपात मे बाटता हैं। (§ १५)

चित्र १८

परिगत गोले की त्रिज्या

$$क\ प = \frac{३}{४}\ क\ म = \frac{३}{४} \cdot \frac{२\ की \sqrt{२}}{\sqrt{३}} = \frac{१}{२}\sqrt{६}\ की ।\qquad (§\ १९)$$

सम चतुष्फलक में क म, ख न...इस प्रकार के चारों लम्ब समान होंगे।

अस्तु, प्रत्येक समतल से प की दूरी प म अर्थात् $\frac{१}{४}$ क म है।

∴ प ही चतुष्फलक का अन्तर्केंद्र भी है, और अन्तर्गत गोले की त्रिज्या

$$प\ म = \frac{१}{३}\ प\ क = \frac{१}{३}\ त्रि = \frac{१}{६}\sqrt{६}\ की ।$$

(६) एक सम चतुष्फलक का कोर १६" है। उसके परिगत और अन्तर्गत गोलों की त्रिज्यायें निकालो। (बनारस १९३९)

(७) ४" व्यास की एक गेंद एक समतल तख्ते पर लुढक कर २½" व्यास के एक वर्तुल छेद मे गिर पड़ती है। बताओ कि गेंद की चोटी तख्ते से कितनी ऊँची है।

(८) एक चतुष्फलक में एक गोला किस प्रकार बनाओगे कि उसके सब फलकों को स्पर्श करे।

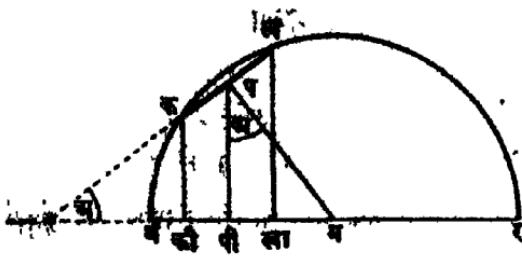
(९) एक बर्तन शंकु के छिन्न के आकार का है जिसका छोटा सिरा तली में है। २" त्रिज्या का एक गोला उसके अन्दर रक्खा है, जो तली और तिरछे तल को स्पर्श करता है। ८" त्रिज्या का एक दूसरा गोला छोटे गोले पर रक्खा है और ऊपरी भाग के तिरछे तल को स्पर्श करता है। वर्तन की समाई निकालो।

(४०) गोले का छिल्ल उस भाग को कहते हैं जो दो समानान्तर समतलों के बीच अन्तखण्डित हो। छिल्ल के वक्रतल को कटिबन्ध कहते हैं।

गोले के उस भाग को जिसे कोई समतल काटे, गोलीय खण्ड कहते हैं। गोलीय खंड के वक्रतल को टोपी कहते हैं।

चित्र ९९

चित्र १००

(४१) कटिबन्ध का क्षेत्रफल

मान लो कि गोला अर्धवृत्त य क र के, अपने व्यास य र के चारों ओर घूमने से, बनता है। मान लो कि उस वृत्त में, जिसका यह अर्धवृत्त एक भाग है, एक सम संख्या की भुजाओं का सम बहुभुज खींचा गया है और क ख उसकी एक भुजा है।

मान लो कि क ख का मध्य बिन्दु प है।

म प को [illegible] जो कि क ख पर ⊥ होगी।

य र पर क की, प पी, ख खी ⊥ डालो।

जब अर्धवृत्त परिभ्रमण करेगा तो जीवा क ख एक शंकु का छिन्न बनायेगी और चाप क ख गोले का छिन्न बनायेगी।

अब, शंकु के छिन्न का तल

= π (क की + ख खी) क ख।

= २ π प पी. क ख।

परन्तु, यदि क ख और य र का मध्यस्थ $\angle$ अ है तो प पी और प म का मध्यस्थ $\angle$ भी अ हुआ।

अस्तु, $\frac{\text{प पी}}{\text{प म}}$ = कोज अ = $\frac{\text{की खी}}{\text{क ख}}$ (साध्य २३ उपसाध्य)

अर्थात्, प पी. क ख = प म. की खी।

अस्तु, शंकु के छिन्न का तल = २ π प म की खी।

अब, जब कि बहुभुज की भुजाओं की संख्या निर्वाधि बढ़ जायगी और प्रत्येक भुजा अत्यल्प हो जायगी तो प म गोले की त्रिज्या त्रि के समान हो जायगी और शंकु का छिन्न गोले का छिन्न हो जायगा जिसकी मोटाई की खी अत्यल्प होगी।

अस्तु, गोले के छिन्न का तल, जिसकी मोटाई अत्यल्प हो।

= २ π त्रि × (मोटाई) ....(क)

अब, मान लो कि गोले के किसी छिन्न की मोटाई मो है। छिन्न को हम बहुत से छोटे-छोटे छिन्नों में बाँट सकते हैं जिनमें से प्रत्येक की मोटाई अत्यल्प है। प्रत्येक छिन्न का तल सूत्र (क) से ज्ञात होगा। अस्तु, सबको जोड़ने से,

किसी गोले के छिन्न का वक्रतल = २ π त्रि. मो।

(४२) एक गोलीय खंड बहुत से छिन्नों में बाँटा जा सकता है जिनमें से प्रत्येक की मोटाई अत्यल्प है। अस्तु, यदि खंड की ऊँचाई ऊ है तो

खंडी टोपी का क्षेत्रफल = २ π त्रि. ऊ।

(४३) गोले का तल

एक अर्धगोल को हम एक खण्ड मान सकते हैं जिसकी ऊँचाई त्रि है। अस्तु,

अर्धगोल का तल = २π त्रि^{2}।

इसलिये, गोले का तल = ४ π त्रि^{2}।

अतः, गोले का तल एक अर्धवृत्त के क्षेत्रफल का चौगुना होता है।

अभ्यास ४१

(१) किसी गोले के कटिबन्ध जिनकी मोटाई बराबर हो, तल मे बराबर होंगे ।

(२) किसी गोले का तल उसके परिगत बेलन के तल के बराबर होगा जिसकी ऊँचाई उसके व्यास के बराबर हो ।

(इलाहाबाद १६३८)

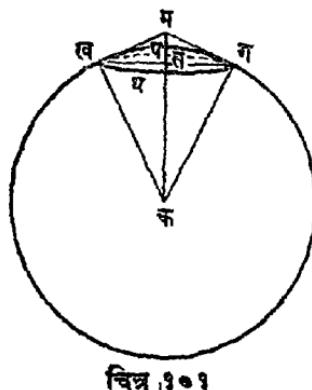
(३) एक गुब्बारे से जो भूमि तल से ५ मील ऊँचा है, पृथ्वी के तल का कितना भाग दिखाई देगा यदि पृथ्वी की त्रिज्या ४००० मील है ?

मान लो कि पृथ्वी का केन्द्र क और दर्शक का स्थान म है ।

म से पृथ्वी के तल को स्पर्शी खींचो और मान लो कि उनके पाद-विन्दुओं की निधि ⊙ ख थ ग है ।

ख ग को जोड़ो ।

म क को जोड़ो ताकि वह पृथ्वी के तल से प पर और समतल ख थ ग से त पर मिले ।

चित्र १०१

म से पृथ्वी के तल का जितना भाग दिखाई देगा वह खण्डी टोपी ख प ग का क्षेत्रफल होगा ।

अब, △ म त ग सम ∠ है त पर ।

अस्तु, व्यास म ग पर खींचा गया ⊙ त में से गुज़रेगा ।

और △ क ग म सम ∠ है ग पर । अस्तु, क ग उस वृत्त का स्पर्शी होगी और क त म एक छेदक जो ⊙ से त, म पर मिलेगी ।

∴ क त. क म = क ग² ।

अर्थात क त (४००० + ५) = ४०००² ।

∴ क त = $\frac{\text{४००० ४०००}}{\text{४००५}} = \frac{\text{४०० ८००}}{\text{८०१}}$

∴ प त = क प − क त

$= \text{४०००} - \frac{\text{४०००.८००}}{\text{८०१}} = \frac{\text{४०००}}{\text{८०१}}$ ।

अस्तु, पृथ्वी का जो भाग म से दृश्य है,

= खण्डी टोपी ख प ग का क्षेत्रफल

$= \text{२} \pi \; \text{४०००} \; \frac{\text{४०००}}{\text{८०१}}$

= लगभग १२५५५७ वर्ग मील ।

नोट—स्पष्टता के लिये हमने बिल्कुल ठीक आकृति नहीं खींची है। वास्तव में जितनी बड़ी रेखा म प बनाई है, उससे कहीं छोटी होगी।

(४) २४′ व्यास का गोला इस प्रकार रक्खा है कि उसका केन्द्र दर्शक की आंख से ३७′ दूर है। दर्शक को उसके तल का जितना भाग दिखाई देगा उसका क्षेत्रफल निकालो।

(५) आँख को एक गोले के तल से कितनी दूर रक्खा जाय ताकि तल का सोलहवाँ भाग दिखाई दे ?

(इलाहाबाद १९३७)

(६) पृथ्वी को ८००० मील व्यास का गोला मान कर ज्ञात करो कि भूमि से लगभग कितने फीट की ऊँचाई पर पृथ्वी तल का दस लाखवाँ भाग दिखाई देगा।

(बनारस १९३४, १९४१)

(७) एक शंकु का शीर्ष कोण १२०°, और व्यास १' है । जो बड़े से बड़ा गोला शंकु में से काटा जा सकता है, उसका तल बताओ ।

(८) एक शंक्वाकार गिलास में, जिसकी गहराई ४" और मुँह की चौड़ाई ६" है, डकाडक पानी भरा है । यदि ६" व्यास का एक गोला गिलास मे रक्खा जाय तो उसका कितना तल पानी में डूब जायगा ।

(९) पृथ्वी को ७९६६ मील व्यास का गोला मानकर निकटतम मीलों में बताओ कि ध्रुव रेखा की लम्बाई क्या है ।

६०° और ६५° अक्षांश के मध्यस्थ कटिबन्ध का क्षेत्रफल भी निकालो जब कि

कोज ६६° ३०' = ३९८७; ज्या ६५° = ·९०६३

(इलाहाबाद १९३०)

चित्र १०२

मान लो कि त थ ध्रुव रेखा का एक व्यास है और म पृथ्वी का केन्द्र है ।

पृथ्वी की त्रिज्या = ३९८३ मील ।

∠थ म ब = ६६° ३०' ।

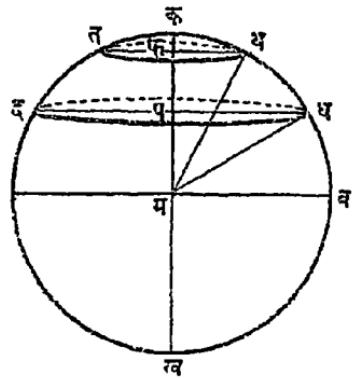
ध्रुव रेखा की त्रिज्या थ फ = त्रिज्या थ म फ = कोज थ म ब

= त्रि कोज ६६° ३०'

= ३९८३ × ·३९८७

= १५८८·०२ मील ।

अस्तु, ध्रुव रेखा की लम्बाई

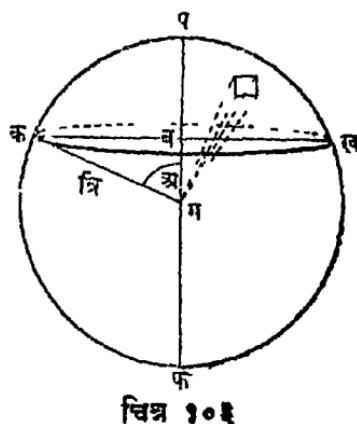
= २ π × १५८८·०२ मील = लगभग ९९८२ मील ।

फिर, म फ − म प = त्रि (कोज २५° − कोज ३०°)
= त्रि (ज्या ६५° − ज्या ६०°) = ३९८३ ('९०६३ − '८६६०)
= १६०' ५१ मील ।
∴ कटिबन्ध (त थ, द ध) = २ π. त्रि प फ ।
= लगभग ४०१८५२८ वर्ग मील ।

(१०) मकर रेखा की लम्बाई और ऊष्ण कटिबन्ध का क्षेत्रफल निकालो । क्षेतफल की पृथ्वी तल से निष्पत्ति भी बताओ ।
(कोज २३° ३०″ = '९१७१)

(११) त्रि तिज्या और ऊ ऊँचाई के एक बेलन के एक सिरे में से उसी आधार और $\frac{१}{२}$ त्रि ऊँचाई का एक गोलीय-खण्ड काटा गया है, और दूसरे सिरे में उसी आधार और $\frac{३}{४}$ त्रि ऊँचाई का एक छेद किया गया है । शेष पिण्ड का पूर्णतल निकालो ।

(बनारस १९४२)

(४४) यदि किसी गोलीय खण्ड के वर्तुल आधार के समस्त बिन्दुओं को गोले के केन्द्र से मिलाया जाय तो जो ठोस एक ओर इन जोड़ने वाली रेखाओं और दूसरी ओर खण्डी टोपी से घिरा हुआ होगा, उसे गोलीय त्रिज्यज कहते हैं ।

चित्र १०१

गोलीय त्रिज्यज का घनफल।

खण्डी टोपी के तल को छोटे २ चतुर्भुज टुकड़ों में बाँटो जैसा कि चित्र मे दर्शाया गया है और प्रत्येक टुकड़े के शीर्षों को केन्द्र से मिलाओ। जब इन टुकड़ों की संख्या अपरिमित हो जायगी तो प्रत्येक टुकड़े का परिमाण अत्यल्प हो जायगा, अस्तु उसे समतल आकृति मान सकते हैं। उस दशा में प्रत्येक टुकड़ा एक हरम का आधार हो जायगा जिसका शीर्ष केन्द्र पर है। और ऐसे प्रत्येक हरम का घनफल

$=\frac{1}{3}$ (टुकड़े का घनफल) $\times$ त्रि।

अस्तु, त्रिज्यज का घनफल

$=\frac{1}{3}$ (खण्डी टोपी का क्षेत्रफल) $\times$ त्रि

$=\frac{2}{3}\pi$ त्रि^{2} ऊ,

जबकि खण्डी टोपी की ऊँचाई ऊ है।

उपसाध्य—मान लो कि त्रिज्यज का अर्ध शीर्ष $\angle$ अ है। तो त्रिज्यज का घनफल

$=\frac{2}{3}\pi$ त्रि^{2} ऊ

$=\frac{2}{3}\pi$ त्रि^{3} $\frac{\text{ऊ}}{\text{त्रि}}=\frac{2}{3}\pi$ त्रि$^3\frac{\text{मप}-\text{मब}}{\text{त्रि}}$

$=\frac{2}{3}\pi$ त्रि$^3\left(१-\frac{\text{मब}}{\text{त्रि}}\right)=\frac{2}{3}\pi$ त्रि^{3} (१ – कोज अ)।

(४५) गोले का घनफल

जब कि त्रिज्यज अर्धगोला हो जाता है तो खण्डी टोपी की ऊँचाई त्रि हो जाती है। अस्तु,

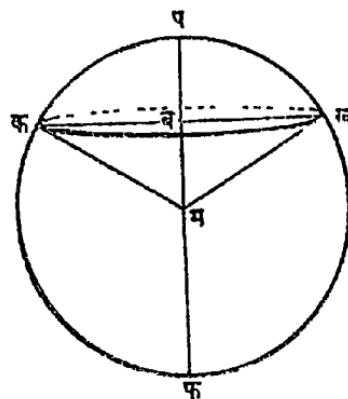
अर्धगोले का घनफल $=\frac{2}{3}\pi$ त्रि^{3}।

$\therefore$ गोले का घनफल $=\frac{4}{3}\pi$ त्रि^{3}।

(४६) गोलीय खंड का घनफल।

चित्र १०४

मान लो कि क प ख एक गोले का खण्ड है जिसका केन्द्र म है।

मान लो कि गोले की त्रिज्या त्रि, खण्ड की ऊँचाई ऊ और खण्ड के वर्तुल आधार की त्रिज्या $त्रि_1$ है। तो

खण्ड का घनफल = त्रिज्यज (म, क प ख) − शंकु (म, क ख)

$$= \frac{2}{3} \pi \, त्रि^2 \, ऊ - \frac{1}{3} \pi \, त्रि_1^2 \, (त्रि - ऊ)$$

$$= \frac{\pi}{3} \{ २ \, त्रि^2 \, ऊ - त्रि_1^2 \, (त्रि - ऊ) \} \quad \ldots \quad (क)$$

परन्तु, यदि प फ एक व्यास है तो प ब. ब फ = ब $क^2$।

अर्थात् $ऊ \, (२ \, त्रि - ऊ) = त्रि_1^2$ (ख)

अस्तु, (क) में $त्रि_1$ का मान रखने से,

खण्ड का घनफल

$$= \frac{\pi}{3} [२ \, त्रि^2 \, ऊ - ऊ \, (त्रि - ऊ) \, (२ \, त्रि - ऊ)]$$

$$= \frac{\pi}{3} [२ \, त्रि^2 \, ऊ - ऊ (२ \, त्रि^2 - ३ \, त्रि \, ऊ + ऊ^2)]$$

$$= \frac{\pi}{3} (३ \, त्रि \, ऊ^2 - ऊ^3) = \pi \, ऊ^2 \left(त्रि - \frac{ऊ}{3} \right) \quad (ग)$$

फिर, (ख) से, $२ \, त्रि - ऊ = \frac{त्रि_1^2}{ऊ}$

अर्थात् $त्रि = \frac{त्रि_1^2 + ऊ^2}{२ऊ}$

∴ (क) से, खण्ड का घनफल

$$= \frac{\pi}{३}\left[२ऊ.\ \frac{(त्रि_1^2 + ऊ^2)^2}{४ऊ^2} - त्रि_1^2\left(\frac{त्रि_1^2 + ऊ^2}{२ऊ} - ऊ\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{३}\left[\frac{(त्रि_1^2 + ऊ^2)^2}{२ऊ} - \frac{त्रि_1^2\ (त्रि_1^2 - ऊ^2)}{२ऊ}\right]$$

$$= \frac{\pi}{६ऊ}\left[त्रि_1^4 + २\,त्रि_1^2\,ऊ^2 + ऊ^4 - त्रि_1^4 + त्रि_1^2\,ऊ^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{६ऊ}\left(३\,त्रि_1^2 ऊ^2 + ऊ^4\right) = \frac{\pi ऊ}{६}\left(३\,त्रि_1^2 + ऊ^2\right) \quad (घ)$$

इस सूत्र से गोले का घनफल निकालो।

(४७) गोलीय छिन्न का घनफल

मान लो कि (प फ, ब भ) एक गोलीय छिन्न है जिसके सिरों की त्रिज्यायें $त्रि_1$ और $त्रि_2$ हैं। मान लो कि म र ल सिरों के समतलों पर ⊥ है जो गोले के तल को क, ख पर और सिरों को र, ल पर काटता है।

चित्र १०५

मान लो कि गोले की त्रिज्या त्रि है, और $क\ र = ऊ_1$, $क\ ल = ऊ_2$। यदि छिन्न की मोटाई र ल = मो, तो $ऊ_1 - ऊ_2 = मो$

अब, छिन्न (प फ, ब भ) का घनफल

= खण्ड (भ क ब) − खण्ड (प क फ)

$$= \pi\ ऊ_1^2 \left(त्रि - \frac{ऊ_1}{3}\right) - \pi\ ऊ_2^2 \left(त्रि - \frac{ऊ_2}{3}\right)$$

$$= \pi\ त्रि\left(ऊ_1^2 - ऊ_2^2\right) - \frac{\pi}{3}\left(ऊ_1^3 - ऊ_2^3\right)$$

$$= \frac{\pi\ (ऊ_1 - ऊ_2)}{३}\left[३\ त्रि\ (ऊ_1 + ऊ_2) - (ऊ_1^2 + ऊ_1 ऊ_2 + ऊ_2^2)\right]$$

परन्तु, क र र ख = र ब², और क ल ल ख = ल फ² ।

अर्थात्, $ऊ_1\ (२\ त्रि - ऊ_1) = त्रि_1^2$,

और $ऊ_2 (२\ त्रि - ऊ_2) = त्रि_2^2$ ।

अस्तु, $त्रि = \frac{त्रि_1^2 + ऊ_1^2}{२\ ऊ_1}$ और $त्रि = \frac{त्रि_2^2 + ऊ_2^2}{२\ ऊ_2}$

$$\therefore घनफल = \frac{\pi\ मो}{३}\left[३\ ऊ_1 \frac{त्रि_1^2 + ऊ_1^2}{२\ ऊ_1} + ३\ ऊ_2 \frac{त्रि_2^2 + ऊ_2^2}{२\ ऊ_2} - (ऊ_1^2 + ऊ_1 ऊ_2 + ऊ_2)\right]$$

$$= \frac{\pi\ मो}{६}\left[(३\ त्रि_1^2 + ऊ_1^2) + ३(त्रि_2^2 + ऊ_2^2) - २(ऊ_1^2 + ऊ_1\ ऊ_2 + ऊ_2^2)\right]$$

$$= \frac{\pi\ मो}{६}\left[३\ त्रि_1^2 + ३\ त्रि_2^2 + (ऊ_2 - ऊ_2)^2\right]$$

$$= \frac{\pi\ मो}{६}\left(३\ त्रि_1^2 + ३त्रि_2^2 + मो^2\right)$$

अभ्यास ४२

(१) एक अर्धगोल के परिगत बेलन और अन्तर शंकु खींचे गए हैं। शंकु का शीर्ष अर्धगोल के उच्चतम बिन्दु पर है, और दोनों के आधार एकागी हैं। सिद्ध करो कि,

$$\frac{\text{बेलन का घनफल}}{३} = \frac{\text{अर्धगोल का घनफल}}{२} = \frac{\text{शंकु का घनफल}}{१}$$

(इलाहाबाद १६३८)

(२) धातु के एक ठोस बेलन में से, जिसकी लम्बाई ४५ सम और व्यास ४ सम है, ६ सम व्यास के कितने गोले ढाल सकते हो।

(३) एक घनफुट सीसे में से ६" त्रिज्या का एक गोला काटकर शेष को गलाकर एक दूसरा गोला ढाला गया है। उसका व्यास निकालो।

(४) एक सम चतुष्फलक के, जिसका कोर २ से० मी० है, परिगत गोले का घनफल निकालो।

(५) यदि घ और त किसी शंकु के घनफल और पूर्णतल हों और घी और ती उसके अन्तर्गत गोले के घनफल और तल हों, तो सिद्ध करो कि घ : घी = त : ती।

(बनारस १९३८)

(६) दो गोलों में, जिनकी त्रिज्यायें ३" और ४" की हैं और जिनके केन्द्रों की मध्यस्थ दूरी ५" है, कितना घनफल युगल है ?

(इलाहाबाद १९३७)

(७) पानी की एक बूँद को, जिसका व्यास $\frac{१}{१०}$" है, गोलाकार मानकर यह बताओ कि शराब के एक शङ्काकार गिलास

को, जिसका अवलम्ब उसके मुँह के व्यास के बराबर है, ५०० बूँदे कहाँ तक भर देगी।

मान लो कि (म, त थ) शक्वाकार गिलास है और पानी की ५०० बूँदे उसे ती थी तक भर देती हैं ।

चित्र १०६

तो $\frac{\text{म की}}{\text{की थी}} = \frac{\text{म क}}{\text{क थ}} = \frac{२}{१}$,

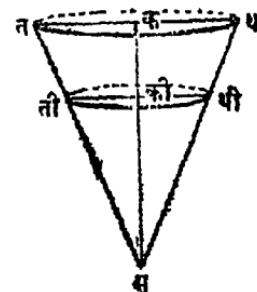
अस्तु, यदि म की = ऊ, तो की थी = $\frac{१}{२}$ऊ ।

शंकु (म, ती थी) का घनफल

$= \frac{१}{३}\pi$, की थी^{२}, म की ।

$= \frac{१}{३}\pi\left(\frac{१}{२}\text{ऊ}\right)^{२}$ ऊ ।

और, पानी की एक बूँद का घनफल = $\frac{४}{३}\pi\left(\frac{१}{२०}\right)^{३}$ ।

$\therefore \frac{१}{३}\pi\left(\frac{१}{२}\text{ऊ}\right)^{२}\text{ऊ} = ५००, \frac{४}{३}\pi\left(\frac{१}{२०}\right)^{३}$ ।

$\therefore$ ऊ = १" ।

अस्तु, पानी गिलास में १" ऊँचाई तक भर जायगा ।

(८) एक गोलीय खण्ड, जो एक अर्धगोल से बड़ा है, की ऊँचाई १८" है । यदि गोले की त्रिज्या १३" हो तो खंड का घनफल निकालो ।

(९) ८" त्रिज्या के गोले के एक कटिबन्ध का घनफल निकालो जिसकी मोटाई २" और बड़े आधार की त्रिज्या ६" है ।

(१०) एक नाँद एक गोलीय खण्ड के आकार की है । नाँद की गहराई ९" और उसके मुँह का व्यास ३" है । नाँद में कितना पानी अँटेगा ?

(११) पृथ्वी को एक गोला मान कर बताओ कि ३०° उत्तरी और ६०° उत्तरी अक्षांश के मध्यस्थ छिन्न में (क) पृथ्वी

के तल का (ख) पृथ्वी के घनफल का, कितना भाग समायेगा।

चित्र १०७

चित्र से, छिन्न की मोटाई

$$\text{प फ} = \text{म फ} - \text{मप}$$

$$= \text{त्रि कोज } ३० - \text{त्रि कोज } ६० = \frac{\text{त्रि}(\sqrt{३}-१)}{२}।$$

$$\therefore \frac{\text{छिन्न का तल}}{\text{पृथ्वी का तल}} = \frac{२\pi\,\text{त्रि}.\frac{\text{त्रि}(\sqrt{३}-१)}{२}}{४\pi\,\text{त्रि}^{२}} = \frac{\sqrt{३}-१}{४}.$$

$$\text{और प ध} = \text{त्रिज्या } ६० = \frac{\text{त्रि}\sqrt{३}}{२},$$

$$\text{फ थ} = \text{त्रिज्या } ३० = \tfrac{१}{२}\,\text{त्रि}।$$

$$\therefore \frac{\text{छिन्न का घनफल}}{\text{पृथ्वी का घनफल}} = \frac{\frac{१}{६}\pi\frac{\text{त्रि}(\sqrt{३}-१)}{२}\left[३.\frac{३\,\text{त्रि}^{२}}{४}+३\frac{\text{त्रि}^{२}}{४}+\frac{(\sqrt{३}-१)^{२}}{४}\text{त्रि}^{२}\right]}{\frac{४}{३}\pi\,\text{त्रि}^{३}}$$

$$\frac{\sqrt{३}-१}{१६}\left[\frac{९}{४}+\frac{३}{४}+\frac{४-२\sqrt{३}}{४}\right] = \frac{\sqrt{३}-१}{१६}\cdot\frac{१६-२\sqrt{३}}{४}$$

$$= \frac{(\sqrt{३}-१)(८-\sqrt{३})}{३२} = \frac{९\sqrt{३}-११}{३२}$$

(१२) एक बेलनाकार बर्तन, जिसकी ऊँचाई ६" और व्यास ४" है, पानी से भरा है। १½" त्रिज्या का एक धातु का गोला उसमें डाला गया है। जितना पानी बर्तन में बच रहेगा, उसका, निकटतम औंस तक, भार निकालो।

(इलाहाबाद १९३६)

(१३) एक ठोस, जो एक शंकु को एक अर्धगोल पर रखने से बना है, पानी से भरे एक बेलन में सीधा खड़ा रखा गया है। बेलन की त्रिज्या ३', ऊँचाई ६'; अर्धगोल की त्रिज्या २' और शंकु की ऊँचाई ४' है। जो पानी बेलन में बच रहेगा उसका घनफल, निकटतम घनफुट तक, निकालो।

(१४) एक वर्तुल कमरे में, जिसकी छत एक अर्ध गोलाकार गुम्बज है, ५२३६ घनफुट वायु समाती है। कमरे का आन्तरिक व्यास उसके उच्चतम विन्दु की, भूमि से, ऊँचाई के बराबर है। ऊँचाई ज्ञात करो।

(१५) ५" त्रिज्या के एक गोले में ३" त्रिज्या का एक बेलनाकार छेद इस प्रकार किया गया है कि बेलन का अक्ष गोले के के केन्द्र मे से गुजरता है। गोले के शेष भाग का घनफल निकालो।

(१६) एक अर्धगोला जिसका आधार ४' व्यास का है, भूमि पर रक्खा है और आधार के दूसरी ओर एक शंकु बिठाया हुआ है जिसका शीर्ष कोण समकोण है। यदि इस स्थिति में उनका परिगत बेलन खींचा जाय तो वह कितना अवकाश और घेरेगा ?

(इलाहाबाद १९३७)

(१७) एक गोला एक छिन्न शंकु के अन्दर इस प्रकार रक्खा गया है कि वह उसके वक्रतल को और आधारों के केन्द्रों को छूता है। सिद्ध करो कि गोले की त्रिज्या छिन्न के सिरों की त्रिज्याओं का गुणोत्तर मध्यमान होगी और छिन्न का घनफल उस बेलन के घनफल का $\frac{2}{3}$ होगा जिसका आधार क्षेत्रफल में छिन्न के पूर्णतल के बराबर हो और जिसकी ऊँचाई गोले की त्रिज्या के बराबर हो।

(स्पष्ट है कि इस साध्य का पहला भाग अभ्यास ३८ (३) का विलोम है).

उत्तरमाला

अभ्यास ३

३ — (क) एक (ख) अनन्त।

अभ्यास ४

१ — $५\sqrt{२}$, १३, $\frac{५\sqrt{३१३}}{१३}$

अभ्यास ५

२ — ५ से. मी

अभ्यास ७

१ — एक (२) अनन्त; सब एक समतल पर स्थित् हैं।

अभ्यास २०

(६) (क) समानान्तर रेखाओं (ख) बिन्दुओं (ग) समानान्तर रेखाओं (घ) एक ही रेखा से।

अभ्यास २१

(३) रेखा की लम्बाई × (क) $\frac{\sqrt{३}}{२}$ (ख) $-\sqrt{\frac{१}{२}}$ (ग) $\frac{१}{२}$ (घ) १ (ङ) ०।

अभ्यास २२

(४) किसी ऐसे समतल पर जो || समतलों के उस जोड़े पर ⊥ हो जो उन रेखाओं के मध्येन खींचा जाय।

अभ्यास ३०

(६) (क) $\frac{३}{८}$ ।		(ख) $\frac{५}{\sqrt{४१}}$ ।

अभ्यास ३१

(६) ९६० घन इञ्च । (७) ४३२ ग्राम । (८) (ल^{२} – व^{२}) वर्ग फिट । (९) ९, १२, २१ गज । (१०) ३$\frac{३}{८}$ इञ्च ।
(११) ३२.९″ ।

(१२) कोज $^{-१}$ $\frac{१}{३}$ ।

अभ्यास ३२

(३) ३८० + २८$\sqrt{३}$; २० (१५ + ७$\sqrt{३}$) । (४) ८″, १५″ ।
(५) २३२ वर्ग फ़ुट; ३५२ घनफ़ुट । (६) ४ ६ घन फ़ुट ।
(७) ६२५७$\frac{७}{९}$ घन गज़ ।

अभ्यास ३३

(२) ४३२ घन फ़ुट ८६४ घन इञ्च ।
(३) ५.८ से. मी ; २८.९७ वर्ग से. मी. ; $\frac{१}{२}$ । (४) ४″ ।

अभ्यास ३४

(८) (क) कोज $^{-१}$ $\frac{२}{३\sqrt{७}}$ ।		(ख) कोज $^{-१}$ $\frac{१७}{४२}$ ।

(९) स्पज्या $^{-१}$ $\sqrt{२}$ । (११) ८ (३ + $\sqrt{३}$) वर्ग फ़ुट ।
(१२) २४ कोर, १२ शीर्ष ; ५ : ६ ।

अभ्यास ३५

(१) ३० वर्ग फ़ुट । (२) ३६ वर्ग फ़ुट । (३) २४ वर्ग फ़ुट ।
(४) १४० घन सम । (५) ३१२५ टन । (६) २७३ घन इञ्च ।

अभ्यास ३६

(५) २८ π वर्ग इञ्च ; ३६ π वर्ग इञ्च ; २८ π घन इञ्च।

(६) ५००० घन सम; १२ से. मी. ६ मि. मी।

(७) ३८५ मि. मी ; ४२६४.४ ग्राम। (८) २१० घन इञ्च।

(९) २४७.५ घन इञ्च। (१०) ८२००.८ घन इञ्च; ३६४४.८ वर्ग इञ्च।

अभ्यास ३७

(४) π क² √२; $\frac{१}{६}$ π क³ √२, जिसमें क सम ∠ की कोई भुजा है।

(५) $\frac{१}{२}$ π क³ जिसमें क △ की भुजा है। (६) π क³ √२ जिसमें क वर्ग की भुजा है। (८) १८४८ घन इञ्च (९) ५६.३ घन इञ्च। (१०) ६′।

अभ्यास ३८

(४) १ : ७ : १९ । (६) १ : २ । (७) ऊँचाई सम-द्विभाजित हो जाती है। (८) ६′, ५′। (९) ४$\frac{५}{८}$″। (१०) ९′ $\frac{१}{३}$″।

अभ्यास ४०

(६) ४√६″, $\frac{४\sqrt{२}''}{\sqrt{३}}$। (७) ३.५६″ (९) ११६.०६४ π घन इञ्च।

अभ्यास ४१

(४) ४११.० वर्ग फुट। (५) गोले की त्रिज्या का $\frac{१}{३}$।

(६) ४२' । (७) (७ - ४√३) π वर्ग फ़ुट । (८) ३७.७ वर्ग इञ्च । (१०) लगभग २२६६१ मील ; लगभग ७६५१५४४३ वर्ग मील ; २९८७ । (११) ½ π त्रि (४ऊ+५त्रि)

अभ्यास ४२

(२) ५ । (३) लगभग १२" । (४) ७ ७ घन से० मी० (६) १९.३ घन इञ्च । (८) ७१२८ घन इञ्च । (९) १११.३ घन इञ्च । (१०) २.९ घन फ़िट । (१२) २ पौण्ड ३.५ औन्स । (१३) १३६.२ घन फिट । (१४) लगभग २०' ; (१५) २६८२ घन इंच । (१६) २५.१ घन फिट ।

सूत्रावली

(क) आयतज और घनज

(१) आयतज का तल = २ (ल चौ + ऊँ चौ + ऊँ ल)

(२) घनज का तल = ६ $(\text{कोर})^2$

(३) आयतज का घनफल = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई।

(४) घनज का घनफल = $(\text{कोर}))^3$

(ख) समकोर

(१) लाम्बिक समकोर का भुजातल

= (आधार की परिमिति) × लाम्बिक ऊँचाई

(२) समकोर का घनफल

= (आधार का क्षेत्रफल) × लाम्बिक ऊँचाई

(३) विच्छिन्न समकोर का घनफल

= $\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × (की + खी + गी)

(ग) हरम

(१) लाम्बिक हरम का तिरछा तल

= $\frac{1}{2}$ (आधार की परिमिति) × तिरछी ऊँचाई

(२) हरम का घनफल

= $\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई

(३) लाम्बिक हरम के छिन्न का तिरछा तल

= $\frac{1}{2}$ (सिरों के घेरों का योग) × तिरछी ऊँचाई

(४) लाम्बिक हरम के छिन्न का घनफल

= $\frac{1}{3}$ मो $[\text{क्षे}_1 + \sqrt{\text{क्षे}_1 \, \text{क्षे}_2} + \text{क्षे}_2]$

(घ) समचतुष्फलक (कोर २ को, ऊँचाई ऊ)

(१) पूर्ण तल $=$ ४ को$^{२}\sqrt{३}$

(२) घनफल $= \frac{२}{३}$ को$^{३}\sqrt{२}$

(३) द्वितल कोण $=$ कोज$^{-१}\ \frac{१}{३}$

(४) ३ ऊ^{२} $=$ ८ को^{२}

(५) अन्तर्त्रिज्या $= \frac{\text{को}}{\sqrt{६}}$

(६) परित्रिज्या $= \sqrt{\frac{३}{२}}$ को

(७) दो सम्मुख कोरों के बीच की न्यूनतम दूरी $=$ को$/\sqrt{२}$

(ङ) लाम्बिक वर्तुल बेलन

(१) वक्र तल $=$ २π त्रि ऊ

(२) पूर्ण तल $=$ २ π त्रि (त्रि $+$ ऊ)

(३) घनफल $= \pi$ त्रि^{२} ऊ

(४) विच्छिन्न बेलन का घनफल $= \pi$ त्रि$^{२}\ \frac{\text{ऊ}_{१} + \text{ऊ}_{२}}{२}$

(च) लाम्बिक वर्तुल शंकु

(१) वक्र तल $= \pi$ त्रि ल

(२) पूर्ण तल $= \pi$ त्रि (त्रि $+$ ल)

(३) घनफल $= \frac{१}{३}\ \pi$ त्रि^{२} ऊ

(४) शकु के छिन्न का वक्र तल $= \pi$ (त्रि$_{१}$ $+$ त्रि$_{२}$) ल

(५) शंकु के छिन्न का घनफल

$= \frac{१}{३}\ \pi$ मो (त्रि$_{१}^{२}$ $+$ त्रि$_{१}$ त्रि$_{२}$ $+$ त्रि$_{२}^{२}$)

(छ) गोला

(१) वक्र तल $=$ ४ π त्रि^{२}

(२) घनफल $= \frac{४}{३}\ \pi$ त्रि^{३}

(३) खण्ड का वक्र तल $=$ २ π त्रि ऊ

(४) खण्ड का घनफल $= \pi$ ऊ^{2} $\left(\text{त्रि} - \frac{\text{ऊ}}{३}\right)$

$= \frac{१}{६} \pi$ ऊ $(३ \text{ त्रि}_{१}^{२} + \text{ऊ}^{२})$

(५) त्रिज्यज का घनफल $= \frac{२}{३} \pi$ त्रि^{२} ऊ

(६) छिन्न का वक्र तल $= २ \pi$ त्रि मो

(७) छिन्न का घनफल $= \frac{१}{६} \pi$ मो

$(३ \text{ त्रि}_{१}^{२} + ३ \text{ त्रि}_{२}^{२} + \text{मो}^{२})$

शब्दावली

Adjacent Angles	आसन्न कोण
Adjoining	सलग्न
Alternate	एकान्तर
Altitude	अवलम्ब
Angle	कोण
Antarctic circle	दक्षिण रेखा
A number of	कई एक
Approximate	उपनीत
Approximately	लगभग
Arctic circle	ध्रुव रेखा, उत्तर रेखा
Area	क्षेत्रफल
At right Angles	परस्पर लम्ब
Axis	अक्ष
Ball	गेंद
Balloon	गुब्बारा
Bar	छड़
Base	आधार
Bisect	समद्विभाग करना, अधियाना
Blackboard	श्यामपट्ट
Board	तख्ता
Bottom	तली, पेंदी
Bowl	कटोरा, नाँद
Bucket	बाल्टी

Cap	टोपी
Capacity	समाई
Case	दशा
Cavity	छिद्र
Centimeter	सेन्टीमीटर
Central line	केन्द्रीय रेखा
Centre	केन्द्र
Centroid	केन्द्रक
Chord	जीवा
Circle	वृत्त
Circular	वर्तुल, वृत्तीय
Circum-Centre	परिकेन्द्र
Circumference	परिधि
Circumcsribed	परिगत, परिलिखित
Collinear	समरैखिक
Cistern	हौज
Cm.	से० मी; सेमी०; सम
Common (to both)	युगल, साझी, उभयनिष्ठ
Common (to all)	सार्व
Common section	युगल काट
Compasses	परकार
Concave	नतोदर
Concurrent	बिन्दुगामी
Condition	शर्त
Cone	शंकु
Congruent	सर्वांगसम
Conical	शंकीय, शंकाकार

Constant	अचल
Contact	सम्पर्क, स्पर्श
Converse	विलोम
Conversely	विलोमतः
Convex	उन्नतोदर
Coplanar	समतलस्थ
Corresponding	सगत
Cosecant	व्युज्या
Cosine	कोज्या
Cotangent	कोस्पज्या
Coterminous	बिन्दुगामी
Cross-section	अनुप्रस्थ काट
Cube (power)	घन
Cube (solid)	घनज
Cuboid	आयतज
Curve	वक्र
Curved	वक्र
Cylinder	बेलन
Cylindrical	बेलनीय, बेलनाकार
Diagonal	विकर्ण
Diametar	व्यास
Different	भिन्न, विभिन्न
Dihedral Angle	द्वितल कोण
Dimension	विस्तार
Distance	दूरी
Dodecahedron	द्वादशफलक
Draw	खींचना

Duplicate	वर्गित
Earth	पृथ्वी
Earth	मिट्टी
Edge	कोर
End	सिरा
Enunciation	प्रतिज्ञा
Equidistant	समदूरस्थ
Equilateral triangle	समत्रिभुज
Equivalent	तुल्य
Exception	अपवाद
Exterior Angle	बहिष्कोण
External	बाह्य
Extremity	छोर, सिरा
Face	फलक
Figure	आकृति
Finite	परिमित
Fixed end	बद्ध सिरा
Fixed point	अचल बिन्दु, स्थिर बिन्दु
Floor	फर्श
Foot (of the perpendicular)	पादबिन्दु (लम्ब का)
Form	रूप
Formula	सूत्र
Fraction	भिन्न
Frustum	छिन्न
Generating Line	जनक रेखा
Generation	जनन

Given	दिया हुआ, न्यस्त
Great circle	वृहत वृत्त
Ground Level	भूमि तल
Guide	प्रदर्शक
Height	ऊँचाई
Hemisphere	अर्धगोला
Hexagon	षट्भुज
Hollow	खोखला
Horizontal	क्षैतिज
Hypotenuse	कर्ण
Icosahedron	विंशतिफलक
Identical	एकांगी, अभिन्न
Identically equl	सर्वांगसम
Imagine	कल्पना करो
Impossible	असम्भव
Inclined	झुका हुआ. आनत
Indefinitely	निरवधि, अनन्ततः
Infinite	अनन्त
Inscribed	अन्तर्लिखित
Inside	के अन्दर
Intercept	अन्तःखण्ड
Internal	आन्तरिक
Interior angle	अन्तःकोण
Intersect	काटना, छेदना
Intersecting	छेदक
Isosceles tiangle	समद्वि-त्रिभुज
Joining line	संयोजक रेखा

Kind	प्रकार
Lateral surface	भुजा तल
Latitude	अक्षांश
Latter	पिछला
Line	रेखा
Line of intersection	कटान रेखा
Line of section	कटान रेखा
Line of the greatest slope	महत्तम ढाल रेखा
Locus	निधि, बिन्दुपथ
Mast	मस्तूल
Mean	मध्यमान
Measure	माप, नाप
Meet	मिलना
Metal	धातु
Middle point	मध्य बिन्दु
Millimeter	मिलीमीटर
Minimum	लघुत्तम
Mm	मि० मी; मिमी०
Moving	गतिशील
Mutual	पारस्परिक
Mutually	परस्पर
Near	समीप
Nearer	समीपतर
Nearest	समीपतम
Necessary	आवश्यक
Non-collinear	विषमरैखिक

Non-coplanar	विषमतलस्थ
Non-intersecting	अछेदक
Normal	अभिलम्ब
Oblique	तिर्यक
Observation	अवलोकन
Observer	दर्शक
Octahedron	अष्टफलक
Opposite	सम्मुख
Ortho-centre	लाम्बिक केन्द्र
Outside	के बाहर
Pair	जोड़ा, युग्म
Pass	गुज़रना, होकर जाना
Path	पथ
Parallel	समानान्तर
Parallelogram	समानाभुज
Parallelopiped	समानाफलक
Pedal Triangle	पदिक त्रिभुज
Perimeter	परिमिति
Perpendicular	लम्ब
Plane	समतल
Point	बिन्दु
Polygon	बहुभुज
Polygonal	बहुभुजी, बहुपहला
Polyhedral angle	बहुतल कोण
Polyhedron	बहुफलक
Possible	सम्भव
Prism	समकोर

Prismoid	समकोरज
Prismoidal	समकोरजी
Problem	निर्मेय, प्रश्न
Produce	बढ़ाना
Produced	विस्तृत
Projection	विक्षेप
Proportion	अनुपात
Proportional	अनुपाती
Proposition	साध्य
Pyramid	हरम
Pyramidal	हरमीय
Quadrilateral (noun)	चतुर्भुज
Quadrilateral (Adj)	चतुर्भुजी, चौपहला
Quantity	परिमाण
Radius	त्रिज्या
Ratio	निष्पत्ति
Rectangle	आयत
Rectangular	आयताकार
Rectilineal	सरल रेखात्मक
Regular	सम
Represent	निरूपण करना
Reservoir	हौज़
Respectively	क्रमशः
Revolution	परिक्रमण, परिक्रमा
Right	लाम्बिक
Right angle	समकोण
Scalene triangle	विषम त्रिभुज

Secant (line)	छेदक
Secant (ratio)	व्युकोज्या
Section	काट, परिच्छेद
Sector	त्रिज्यज
Segment	खण्ड, अवधा
Segmental cap	खण्डी टोपी
Shortest	न्यूनतम, सब से छोटा
Side (of a triangle)	भुजा
Side (of an equation)	पक्ष
Side-face	भुजा फलक
Similar	समरूप
Sine	ज्या
Situated	स्थित
Situation	स्थिति
Sken	कुटिल
Slant	तिरछा
Slope	ढाल
Small circle	लघु वृत्त
Solid	ठोस
Solid of Revolution	परिक्रम ठोस
Space	अवकाश
Specific gravity	विशिष्ट घनत्व
Sphere	गोला
Spherical	गोलीय, गोलाकार
Spheroid	उपगोल
Spheroidal	उपगोलीय, उपगोलाकार
Spirit-level	तलमापक

Square	वर्ग
Sufficient	पर्याप्त
Sum	योग, जोड़
Supplementary	ऋजुपूरक
Suppose	मान लो
Surface	तल; पृष्ठ
Symmetrically Equal	विमुखी सम
Symmetry	सममिति
System	समूह; पद्धति
Tangent (line)	स्पर्शी
Tangent (ratio)	स्पज्या
Tetrahedron	चतुष्फलक
Theorem	प्रमेय
Through	में से, के मध्येन
Top	चोटी, सिर
Torrid zone	ऊष्ण कटिबन्ध
Touch	छूना, स्पर्श करना
Transversal	तिर्यक
Trapezium	समलम्बभुज
Trench	खाई
Triangle	त्रिभुज, त्रिकोण
Triangular	त्रिभुजी, तिपहला
Trihedral angle	त्रितल कोण
Triplicate	घनित
Trisect	समत्रिभाग करना
Tropic of Cancer	कर्क रेखा
Trpic of Capricorn	मकर रेखा

Truncated	विच्छिन्न
Vault	गुम्बज
Vertex	शीर्ष
Vertical	ऊर्ध्व
Vertically opposite Angles	सम्मुख शीर्ष कोण
Visible	दृश्य
Volume	घनफल, आयतन
Wedge	फन्नी, टंक
Weight	भार
Whole surface	पूर्ण तल
Zone	कटिबन्ध

—: • :—

मुद्रक—ए० बी० वर्म्मा, शारदा प्रेस, नया-कटरा—प्रयाग।